

TAMIA MARTA YAMAMOTO

# **CÁLCULO DA ONDULAÇÃO GEOIDAL PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas do Setor de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Doutora.

CURITIBA  
1994

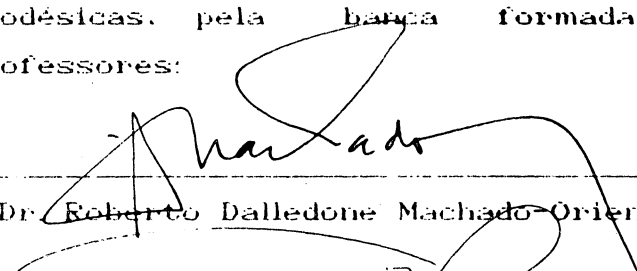
# CALCULO DA ONDULAÇÃO GEOIDAL PELO

## METODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

por

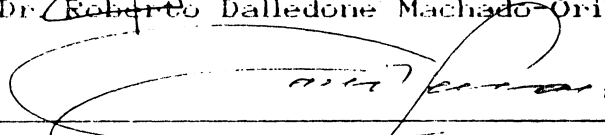
TAMIA MARTA YAMAMOTO

Tese aprovada como requisito parcial para  
obtenção do grau de Doutora em Ciência no  
Curso de Pós - Graduação em Ciências  
Geodésicas, pela banca formada pelos  
Professores:



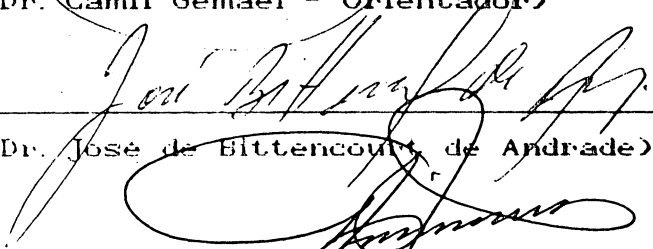
---

(Dr. Roberto Dalledone Machado - Orientador)



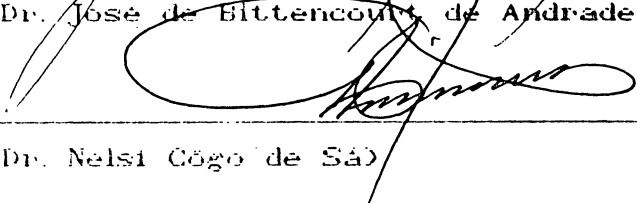
---

(Dr. Camil Gemael - Orientador)



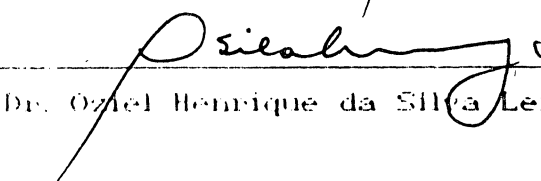
---

(Dr. José de Bittencourt de Andrade)



---

(Dr. Nelsi Côgo de Sá)



---

(Dr. Oziel Henrique da Silva Leite)

Ao meu marido Yuji.

## AGRADECIMENTOS

Desejamos externar os nossos sinceros agradecimentos:

ao Dr. Camil Gemael, Dra. Mildred Ballin Hecke e Dr. Roberto Dalledone Machado, pela orientação, crítica e incentivos na elaboração deste trabalho;

ao Yuji e às filhas, Lia e Mayra, pelo apoio e constante compreensão, que em muitos momentos foram sacrificados para que este trabalho fosse concluído;

a todos os Professores do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas;

ao Departamento de Matemática da Universidade Federal do Paraná, que concedeu o meu afastamento parcial para a realização do Curso;

ao Prof. Caio Nakashima, do CEFET-PR, pelo apoio computacional;

ao Prof. Carlos A. Nadal, pelo auxílio no traçado cartaa geoidais;

ao acadêmico Alvaro Volpato Jr, do CESEC-UFPR, pelo auxílio na edição das figuras;

aos colegas do Curso e às pessoas que, de alguma forma, direta ou indiretamente, auxiliaram neste trabalho.

## RESUMO

Neste trabalho são apresentados os diversos métodos clássicos de determinação do geóide, tais como: astro-geodésico, gravimétrico, astro-gravimétrico, celeste e o combinado; também os métodos mais recentes como Método dos Elementos Finitos e Método dos Elementos de Contorno.

A autora compara os resultados dos cálculos da ondulação geoidal pelo Método dos Elementos de Contorno, pelos desenvolvimento em Harmônicos Esféricos e o Método Gravimétrico, usando a fórmula de Stokes.

## SUMMARY

In this thesis the author presents the classic methods for geoid determinations, as such: astrogeodetic, gravimetric, astrogravimetric, celestial and combined; as well as the recent methods, such as Finite Elements Methods and Boundary Elements Methods.

The author also compare the results of geoidal undulation computed through Boundary Elements Method, Spherical Harmonic Expansion and Stoke's Formula.

## SUMARIO

### Página

TÍTULO.....	11
DEDICATÓRIA.....	111
AGRADECIMENTO.....	iv
RESUMO.....	v
SUMMARY.....	vi

### CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO.....	1
-----------------	---

### CAPÍTULO II

#### MÉTODOS CLASSICOS DE DETERMINAÇÃO DO GEÓIDE

II.1	MÉTODO ASTRO-GEODÉSICO.....	3
	II.1.1 GEÓIDE ASTRO-GEODÉSICO .....	8
II.2	MÉTODO GRAVIMÉTRICO	
	II.2.1 FÓRMULA DE STOKES.....	8
	II.2.2 GEÓIDE GRAVIMÉTRICO.....	15
II.3	MÉTODO ASTRO-GRAVIMÉTRICO.....	17
	II.3.1.DESVIO DA VERTICAL - FÓRMULA DE VENING MEINESZ .....	17
	II.3.2.ESSÊNCIA DO MÉTODO.....	24
	II.3.3.GEÓIDE ASTRO-GRAVIMÉTRICO.....	25
II.4	MÉTODO CELESTE	
	II.4.1.INTRODUÇÃO.....	28
	II.4.2.ONDULAÇÃO GEOIDAL CALCULADA ATRAVES DOS HARMÔNICOS ESFÉRICOS.....	29
	II.4.3.ALTIMETRIA POR SATÉLITES.....	31
	II.4.4.MÉTODO CELESTE ALTERNATIVO.....	33

II.5.	MÉTODO COMBINADO.....	35
 <u>CAPÍTULO III</u> <u>OUTROS MÉTODOS</u>		
III.1	INTRODUÇÃO.....	38
III.2	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	
III.2.1.	ALGUNS ASPECTOS HISTÓRICOS E APLICAÇÕES NA GEODÉSIA.....	39
III.2.2.	DESCRIÇÃO DO MÉTODO.....	42
III.3	MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	
III.3.1.	ALGUNS ASPECTOS HISTÓRICOS.....	49
III.3.2.	DESCRIÇÃO DO MÉTODO.....	53
III.3.3.	EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO.....	56
III.3.4.	ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PROBLEMAS TRI-DIMENSIONAIS.....	65
 <u>CAPÍTULO IV</u>		
IV.1	APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO NA GEODÉSIA.....	69
IV.2	AVALIAÇÃO DAS INTEGRAIS.....	71
IV.3	GEÓIDE CALCULADO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO.....	76
 <u>CAPÍTULO V</u>		
V.1	CONCLUSÃO.....	88
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	90



<u>APÊNDICE I</u>	
INTEGRAÇÃO NUMÉRICA.....	94
<u>APÊNDICE II</u>	
TEOREMA DE GREEN-INTEGRAÇÃO POR PARTES.....	106
<u>APÊNDICE III</u>	
MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL PARA RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES.....	110
<u>APÊNDICE IV</u>	
MAPAS GEODAIS.....	113
<u>APÊNDICE V</u>	
LISTAGENS DOS PROGRAMAS.....	116

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura	Página
II.1.1	Relação entre altura geoidal e desvio da vertical..... 4
II.1.2	Relação entre as componentes principais do desvio da vertical e o azimuth..... 6
II.2.1.1	Altura geoidal N, vertical e normal ao elipsóide..... 9
II.2.1.2	Funções de Stokes e $F(\psi)=0.5\text{sen}(\psi)S(\psi)$ ..... 16
II.3.1.1	Interseção do geóide e do elipsóide por um plano vertical de azimuth arbitrário ..... 19
II.3.1.2	Relação entre coordenadas geográfica e polares..... 22
II.3.2.1	Região de divisão para cálculo dos desvios interpolados 26
II.4.3.1	Posição do satélite com relação às superfícies: oceânica, geoidal e elipsoidal..... 32
II.4.4.1	Altutitudes ortométrica e geométrica..... 34
III.3.3.1	Ponto do contorno, aumentado de um pequeno hemisfério.. 58
III.3.3.2	Sistema de coordenadas elementares..... 60
IV.3.1	Carta geoidal 20x20..... 78
IV.3.2	Carta geoidal 10x10..... 80
IV.3.3	Carta geoidal 5x5..... 83
A.1	Coordenadas triangulares $\eta_1, \eta_2$ e $\eta_3=1-\eta_1-\eta_2$ .....102
A.2	Elemento triangular com singularidade na origem.....104
B.1	Elementos de integração por partes.....107
C.1	Geóide de referência de Rapp 1978, $N_{\max}=16$ , C.I.=5m....114

## CAPITULO I

### INTRODUÇÃO

Uma das superfícies de importância fundamental na Geodésia é a equipotencial que mais se aproxima do nível médio dos mares, o geóide. Esta superfície foi proposta por Gauss como a "modelo matemático da Terra" e introduzida na Geodésia por Listing em 1873 [9].

O geóide é uma superfície fundamental para os sistemas clássicos de altitude, e como tal, forma uma parte essencial de qualquer sistema geodésico intermediário para redução dos dados geodésicos da superfície física ao elipsóide de referência, onde são efetuados todos os cálculos.

O conhecimento do geóide é essencial para uma aproximação tridimensional do ajustamento geodésico e é necessário para qualquer comparação ou ajustamento mútuo de redes de controle horizontal e redes baseadas em satélites.

Assim sendo achamos importante a pesquisa de novos métodos para sua determinação.

Existem vários métodos clássicos de determinação do geóide, os quais podemos enumerar como segue:

1. Método Astro-Geodésico;
2. Método Gravimétrico;
3. Método Astro-Gravimétrico;
4. Métodos Celeste e usando os Coeficientes Harmônicos Esféricos;
5. Método Combinado.

Estes métodos são descritos no Capítulo II.

Recentemente encontramos publicações da aplicação do Método dos Elementos Finitos para cálculo do geopotencial assim como do

geóide. Neste trabalho, propomos o Método dos Elementos de Contorno para determinação da superfície geoidal. Estes dois métodos são descritos no Capítulo III.

O cálculo do geóide pelo Método dos Elementos de Contorno é apresentado no Capítulo IV e as conclusões no Capítulo V.

## CAPITULO II

### METODOS CLASSICOS DE DETERMINAÇÃO DO GEÓIDE

#### II.1. METODO ASTRO-GEODÉSICO.

As coordenadas geodésicas de um ponto P da superfície física da Terra são  $\phi$ ,  $\lambda$  e H, respectivamente, a latitude geodésica, a longitude geodésica e a altitude geométrica.

As coordenadas naturais de um ponto P são  $\phi_a$ ,  $\lambda_a$  e h, respectivamente, a latitude e longitude astronômicas e a altitude ortométrica.

O ângulo  $\theta$  formado pela vertical e a normal, denomina-se desvio da vertical e por sua vez é decomposto nas componentes segundo o meridiano,  $\xi$ , e o primeiro vertical,  $\eta$ .

A relação entre as coordenadas geodésicas e naturais [37] são:

$$\begin{aligned}\phi_a - \phi &= \xi \\ (\lambda_a - \lambda) \cos \phi &= \eta.\end{aligned}$$

Consideremos dois pontos P e Q, bastante próximos, ligados por um arco elementar ds; o desnível dN do geóide, referente ao elipsóide, Fig.II.1.1, escreve-se

$$dN = \theta.ds, \tag{II.1}$$

sendo  $\theta$  a componente do desvio segundo ds.

Esta equação pode ser aplicada sucessivamente a uma série de pontos, onde a "soma" de todos os dN dá a elevação total do geóide entre os pontos extremos. Se representarmos estes extremos por  $P_1$  e  $P_2$  teremos:

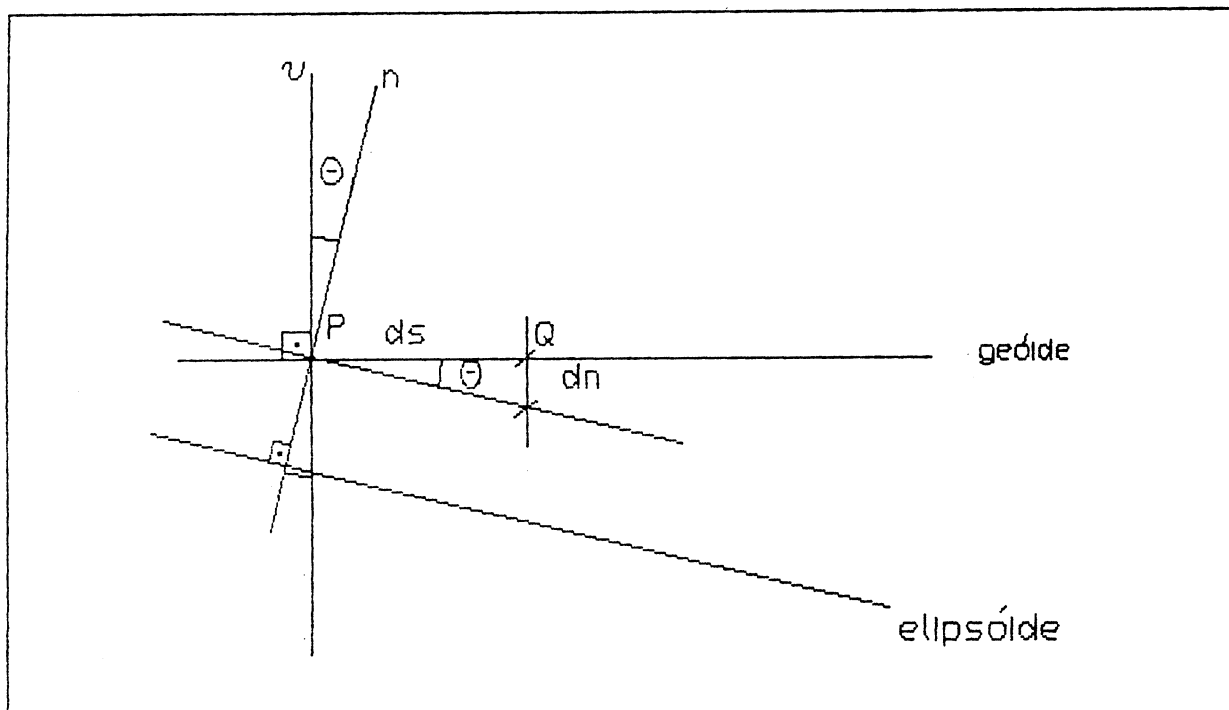


Fig. II.1.1 - Relação entre altura geoidal e o desvio da vertical.

$$N_2 - N_1 = \int_{P_1}^{P_2} \theta \cdot ds \quad (II.2)$$

Se entre  $P_1$  e  $P_2$  pudermos admitir uma variação linear das componentes do desvio da vertical:

$$N_2 - N_1 = \int_{P_1}^{P_2} \theta \cdot ds = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \cdot s \quad (II.3)$$

Na Fig. II.1.2, designamos por  $\alpha_0$  o azimuth do arco ZN, por  $i$  o desvio da vertical, as componentes principais são:

$$\xi = i \cdot \cos \alpha_0, \quad (II.4)$$

$$\eta = i \cdot \sin \alpha_0. \quad (II.5)$$

Projetando o arco  $i$  na direção de azimuth  $\alpha$  e designando por  $\theta$  a componente segundo esta direção:

$$\theta = i \cos(\alpha - \alpha_0),$$

$$\theta = i \cos \alpha \cos \alpha_0 + i \sin \alpha \sin \alpha_0. \quad (II.6)$$

Substituindo (II.4) e (II.5) em (II.6) obtemos

$$\theta = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha. \quad (II.7)$$

Introduzindo (II.7) na (II.3)

$$N_2 - N_1 = \frac{1}{2} s (\xi_1 \cos \alpha_1 + \eta_1 \sin \alpha_1 + \xi_2 \cos \alpha_2$$





$$+ \eta_2 \operatorname{sen} \alpha_2) \quad (\text{II.8})$$

Fazendo  $\alpha_1 \cong \alpha_2 = \alpha$

$$\Delta N = \frac{1}{2} s [\cos \alpha (\xi_1 + \xi_2) + \operatorname{sen} \alpha (\eta_1 + \eta_2)] \quad (\text{II.9})$$

Introduzindo as projeções de s sobre o meridiano e sobre o paralelo de latitude  $\varphi$  e considerando o raio médio R do elipsóide, obtemos:

$$\Delta N = \frac{1}{2} R [(\xi_1 + \xi_2) \Delta \varphi + (\eta_1 + \eta_2) \Delta \lambda \cos \varphi] \quad (\text{II.10})$$

sendo  $\Delta \varphi$  e  $\Delta \lambda$  as diferenças entre as latitudes e as longitudes extremas de s, respectivamente.

Representando por  $\bar{\xi}$  e  $\bar{\eta}$  as médias aritméticas entre as componentes do desvio

$$\Delta N = R (\bar{\xi} \Delta \varphi + \bar{\eta} \Delta \lambda \cos \varphi) \quad (\text{II.11})$$

Exprimindo  $\Delta \varphi$  e  $\Delta \lambda$  em minutos, as componentes médias em segundos e  $R = 6371 \times 10^5 \text{ cm}$

$$\Delta N = 0,9 (\bar{\xi}'' \Delta \varphi + \bar{\eta}'' \Delta \lambda \cos \varphi) \quad (\text{II.12})$$

As coordenadas astronômicas são diretamente observadas, enquanto as coordenadas geodésicas são obtidas da seguinte maneira: num sistema grande de triangulação, um certo "ponto inicial"  $P_0$  é escolhido para o qual a ondulação geoidal  $N_0$  e as componentes  $\xi_0$  e  $\eta_0$  são prescritas. Aqui  $N_0$ ,  $\eta_0$  e  $\xi_0$  podem ser assumidos arbitrariamente em princípio; a posição do elipsóide de referência com respeito a Terra é portanto fixada.

### II.1.1.GEÓIDE ASTRO-GEODÉSICO

O Método Astro-Geodésico foi utilizado por Hayford no início deste século, por volta de 1909, para obter a primeira carta geoidal dos Estados Unidos. O geodesta canadense Ney, em 1952, efetuou investigações no sul de seu país e Irene Fisher estudou o geóide na América do Sul, em 1965 [37].

### II.2.MÉTODO GRAVIMÉTRICO

#### II.2.1 FÓRMULA DE STOKES

A fórmula de Stokes publicada em 1849 por George Gabriel Stokes [12] é de fundamental importância em Geodésia Física para o cálculo das ondulações geoidais a partir dos dados gravimétricos.

Terra Normal é o elipsóide de revolução ao qual se atribui a mesma massa  $M$  e a mesma velocidade de rotação  $\omega$  da Terra além da injunção de a sua superfície ter esferopotencial constante  $U=U_0=C^{te}$ . O geopotencial  $W$  é o potencial de atração mais o potencial rotacional da Terra. E  $U$  o esferopotencial de atração mais o potencial de rotação da Terra Normal.

O potencial da Terra real ou geopotencial  $W$  pode ser expresso por

$$W = U + T \quad (II.13)$$

onde  $U$  é o potencial da Terra Normal ou esferopotencial e  $T$  o potencial perturbador.

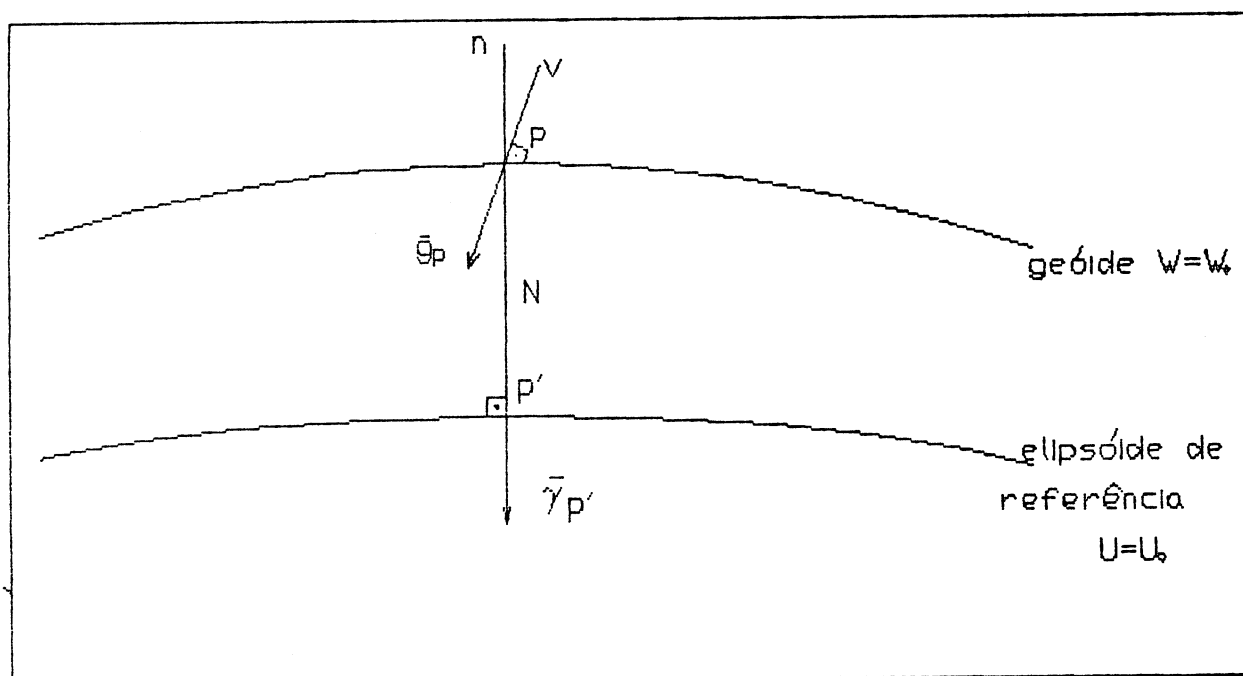


Fig. II.2.1.1 Altura geoidal  $N$ , vertical e a normal ao elipsóide

O módulo da gravidade no ponto P é (Fig.II.2.1.1)

$$g = \left( - \frac{\partial W}{\partial n} \right)_P = - \left( \frac{\partial U}{\partial n} \right)_P - \frac{\partial T}{\partial n} = - \left( \frac{\partial U}{\partial n} \right)_{P'} + \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} N - \frac{\partial T}{\partial n} \quad (\text{II.14})$$

onde N é a separação entre o geóide e o elipsóide, e n indica a normal ao geóide. O fato de g referir-se ao geóide e  $\gamma$  ser calculado sobre o elipsóide; é que mostra a segunda parcela do último membro.

Da expressão anterior, confundindo a normal e a vertical, podemos escrever

$$g = \gamma + N \frac{\partial \gamma}{\partial n} - \frac{\partial T}{\partial n} \quad (\text{II.15})$$

onde,  $\gamma = \text{grad } U \cong - \left( \frac{\partial U}{\partial n} \right)_{P'}$

ou

$$g - \gamma = \Delta g = N \frac{\partial \gamma}{\partial n} - \frac{\partial T}{\partial n}. \quad (\text{II.16})$$

A primeira parcela do último membro é conhecida como termo de Bruns. Ela revela o fato de g referir-se a um ponto do geóide e  $\gamma$  ser calculado sobre o elipsóide.

A expressão (II.16) é denominada equação fundamental da Geodésia Física, porque relaciona a anomalia da gravidade ( $\Delta g$ ) ao potencial anômalo (T).

Se adotarmos no lugar do elipsóide uma esfera homogênea de massa M e raio R da Terra, não rotante, teremos:

$$U = \frac{kM}{R} \quad (II.17)$$

$$-\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right) \simeq \gamma_o \simeq \frac{kM}{R^2} \quad (II.18)$$

$$-\left(\frac{\partial^2 U}{\partial n^2}\right)_{P'} \simeq \frac{\partial \gamma}{\partial n} \simeq -\frac{2kM}{R^3} = -\frac{2\gamma_o}{R} \quad (II.19)$$

onde  $\gamma_o$  é a gravidade normal sobre a esfera, k é a constante gravitacional [12].

A fórmula (II.15) toma a forma

$$\xi = \gamma_o - \frac{2\gamma_o}{R} N - \frac{\partial T}{\partial n} \quad (II.20)$$

O geopotencial sobre o geóide é

$$W_P = U_P + T = U_{P'} + \frac{\partial U}{\partial n} N + T \quad (II.21)$$

e para  $W_P = U_{P'}$  teremos

$$T = \gamma_o N \quad (II.22)$$

expressão conhecida como equação de Bruns.

Substituindo esta equação em (II.20) teremos a equação fundamental da Geodésia Física em sua aproximação esférica:

$$-\Delta \xi = \frac{2T}{R} + \frac{\partial T}{\partial r} \quad (II.23)$$

Sendo  $T$  uma função harmônica, isto é,  $T$  satisfaz a equação de Laplace, é possível expressá-la como soma de polinômios harmônicos esféricos. Considerando as coordenadas esféricas  $(r, \theta, \lambda)$  podemos escrever

$$T(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} T_n(\theta, \lambda).$$

Diferenciando a expressão anterior em relação a  $r$  encontramos

$$\delta g = - \frac{\partial T}{\partial r} = - \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} T_n(\theta, \lambda).$$

Sobre o geóide, em sua aproximação esférica, correspondente a esfera  $r=R$ , temos

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(\theta, \lambda). \quad (\text{II.24})$$

e

$$\delta g = - \frac{\partial T}{\partial R} = - \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) T_n(\theta, \lambda). \quad (\text{II.25})$$

Levando (II.24) e (II.25) em (II.23) obtemos:

$$\Delta g = - \frac{2}{R} \sum_{n=0}^{\infty} T_n(\theta, \lambda) + \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) T_n(\theta, \lambda)$$

ou

$$\Delta g = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) T_n(\theta, \lambda). \quad (\text{II.26})$$

Podemos expressar  $\Delta g(\theta, \lambda)$  como uma série de harmônicos esféricos

$$\Delta g = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta g_n(\theta, \lambda). \quad (\text{II.27})$$

Comparando estas séries concluímos que

$$\Delta g_n = \frac{n-1}{R} T_n(\theta, \lambda). \quad (\text{II.28})$$

ou

$$T_n = \frac{R}{n-1} \Delta g_n; \quad (\text{II.29})$$

nesta fórmula é fácil ver que faltará o termo de primeiro grau, pois ela não é definida para  $n=1$ . Não existe harmônico de primeiro grau se o centro do elipsóide de referência coincide com o centro de gravidade da Terra [12].

Em (II.24) separamos os termos de grau zero e um, e escrevemos

$$T = T_0 + T_1 + T'$$

onde

$$T_0 = \frac{k\delta M}{R},$$

$\delta M$  é a diferença entre a massa  $M$  da Terra e a massa  $M'$  do elipsóide; se estas massas forem iguais anula-se  $T_0$  e se  $r=0$  é o centro de gravidade da Terra, então  $T_1$  é igual a zero. Então levando (II.29) em (II.24) podemos escrever

$$T = \sum_{n=2}^{\infty} T_n = R \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Delta g_n}{n-1}. \quad (\text{II.30})$$

Levando (II.30) em (II.22) podemos calcular a ondulação

$$N = \frac{R}{G} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Delta g_n}{n-1} \quad (II.31)$$

com  $\gamma=G$  valor médio da gravidade.

Laplace e Dirichlet demonstraram que uma função de posição sobre uma esfera pode ser expressa através de uma série de harmônicos esféricos [11]

$$f(\Theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\sigma} P_n(\Psi) F(\Theta, \lambda) d\sigma \quad (II.32)$$

sendo  $d\sigma$  um elemento de superfície da esfera de raio unitário.

Se a função escolhida for  $\Delta g(\theta, \lambda)$  ou simplesmente  $\Delta g$  e considerando a esfera de raio  $R$ :

$$\Delta g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi R^2} \int_S P_n(\Psi) \Delta g_s dS \quad (II.33)$$

sendo  $\Delta g_s$  a anomalia da gravidade no elemento superficial  $dS=R^2 d\sigma$ ;  $\Psi$  a distância angular, sobre  $S$ , entre os pontos  $P(\theta', \lambda')$  e  $dS(\theta, \lambda)$ .

Introduzindo (II.33) em (II.31) resulta

$$N = \frac{1}{4\pi R G} \int_S \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\Psi) \Delta g_s dS \quad (II.34)$$

A expressão

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\Psi) = S(\Psi)$$



depende só de  $\Psi$  e pode ser expresso [19] por

$$S(\Psi) = \csc \frac{\Psi}{2} + 1 - 6 \sin \frac{\Psi}{2} - 5 \cos \Psi - 3 \cos \Psi \ln \left| \sin \frac{\Psi}{2} \left( 1 + \sin \frac{\Psi}{2} \right) \right| \quad (\text{II.35})$$

quando  $\Psi \rightarrow 0$ ,  $S(\Psi) = 2/\Psi$  [12], com o que a (II.34) assume a forma

$$N = \frac{1}{4\pi R G} \int_S S(\Psi) \Delta g_S \, dS. \quad (\text{II.36})$$

Esta expressão é conhecida como fórmula de Stokes para cálculo da ondulação geoidal. É fácil ver que a anomalia da gravidade sobre toda a Terra contribui no valor de  $N$ . O valor de  $\Delta g$  para os pontos próximos contribui mais para a separação geóide-elipsóide. Portanto, para usar a fórmula de Stokes, devemos conhecer melhor os valores das anomalias, particularmente para as vizinhanças do ponto de cálculo. O que se observa pelo comportamento de  $S(\psi)$  no gráfico da Fig.II.2.1.2.

O geóide gravimétrico é conhecido como geóide absoluto, pois refere-se ao elipsóide com centro no centro de massa da Terra, e cujo eixo menor coincide com o eixo de rotação terrestre.

## II.2.2.GEÓIDE GRAVIMÉTRICO

Alguns exemplos de geóides gravimétricos: Em 1934, Hirvonen calculou o primeiro geóide gravimétrico, reunindo 4.500 observações. Em 1948, Tanni publicou um mapa geoidal com anomalias isostáticas no sistema de Pratt-Hayford. Heiskanen calculou o geóide de Columbus com base em anomalias de Faye. Temos o geóide de Zhongolovich também baseado nas anomalias de Faye [11], aproximados com auxílio de harmônicos esféricos.

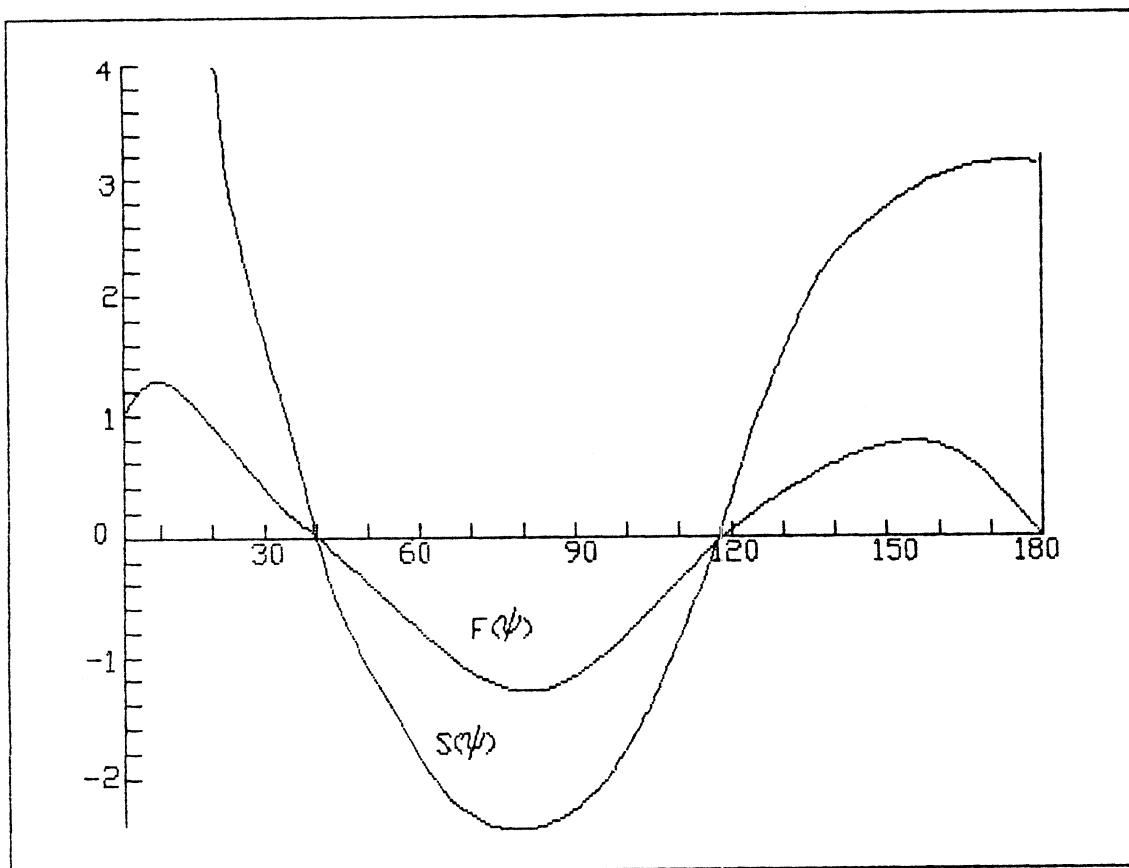


Fig. II.2.1.2 Funções de Stokes  $S(\psi)$  e  $F(\psi)=0.5 \cdot \sin(\psi) \cdot S(\psi)$ .

### II.3.MÉTODO ASTRO-GRAVIMÉTRICO.

O geóide com relação ao elipsóide de referência pode ser calculado a partir do desvio astro-geodésico da vertical, utilizando a integração de linha ao longo da cadeia de triangulação geodésica. Os desvios astro-geodésicos são esparsos, portanto, o geóide baseado neles é inconsistente em muitas regiões. Uma aproximação alternativa foi introduzida por Molodenski, que usa observações gravimétricas em combinação com o desvio astro-geodésico, para obter o geóide denominado geóide astro-gravimétrico [37].

Com base nos dados gravimétricos podemos calcular o desvio da vertical através da fórmula de Vening-Meinesz. Para que o resultado seja digno de confiança é necessário que estes dados estejam uniformemente distribuídos na total superfície da Terra. Infelizmente ainda existem grandes áreas desconhecidas gravimetricamente, tanto nos continentes como nos oceanos. Se na fórmula de Vening-Meinesz a integração não for estendida sobre toda superfície da Terra mas somente sobre a vizinhança do ponto considerado, então um erro é introduzido pelo fato das zonas distantes não serem consideradas. Este erro, entretanto, é quase o mesmo para pontos próximos, e varia lentamente sobre os pontos de um perfil curto, tal que o desvio astro-geodésico calculado desta maneira pode ser usado para interpolação entre desvios astro-gravimétricos.

#### II.3.1 DESVIO DA VERTICAL - FÓRMULA DE VENING-MEINESZ

A fórmula de Stokes que permite o cálculo da ondulação geoidal serviu de base para Vening-Meinesz deduzir duas fórmulas integrais, que hoje levam o seu nome, para o cálculo das componentes principais do desvio da vertical.

A Fig. II.3.1.1 mostra a interseção do geóide e do elipsóide por um plano vertical de azimuth arbitrário. Se  $\varepsilon$  é a componente do desvio da vertical neste plano, então:

$$dN = -\varepsilon ds \quad (\text{II.37})$$

ou

$$\varepsilon = - \frac{dN}{ds} \quad (\text{II.38})$$

o sinal negativo é uma convenção usada para dar às componentes  $\xi$  e  $\eta$  do desvio da vertical com sinal correto correspondente à definição de:

$$\xi = \varphi_a - \varphi \quad (\text{II.39})$$

$$\eta = (\lambda_a - \lambda) \cos \varphi. \quad (\text{II.40})$$

Podemos expressar a diferencial do deslocamento sobre a esfera de raio R em função de  $\varphi$  e  $\lambda$  por:

$$ds^2 = R^2 d\varphi^2 + R^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2. \quad (\text{II.41})$$

Na direção norte-sul:

$$\varepsilon = \xi \quad \text{e} \quad ds = ds_\varphi = R d\varphi \quad (\text{II.42})$$

e na direção leste-oeste:

$$\varepsilon = \eta \quad \text{e} \quad ds = ds_\lambda = R \cos \varphi d\lambda. \quad (\text{II.43})$$

Levando a (II.42) e (II.43) em (II.38) encontramos:

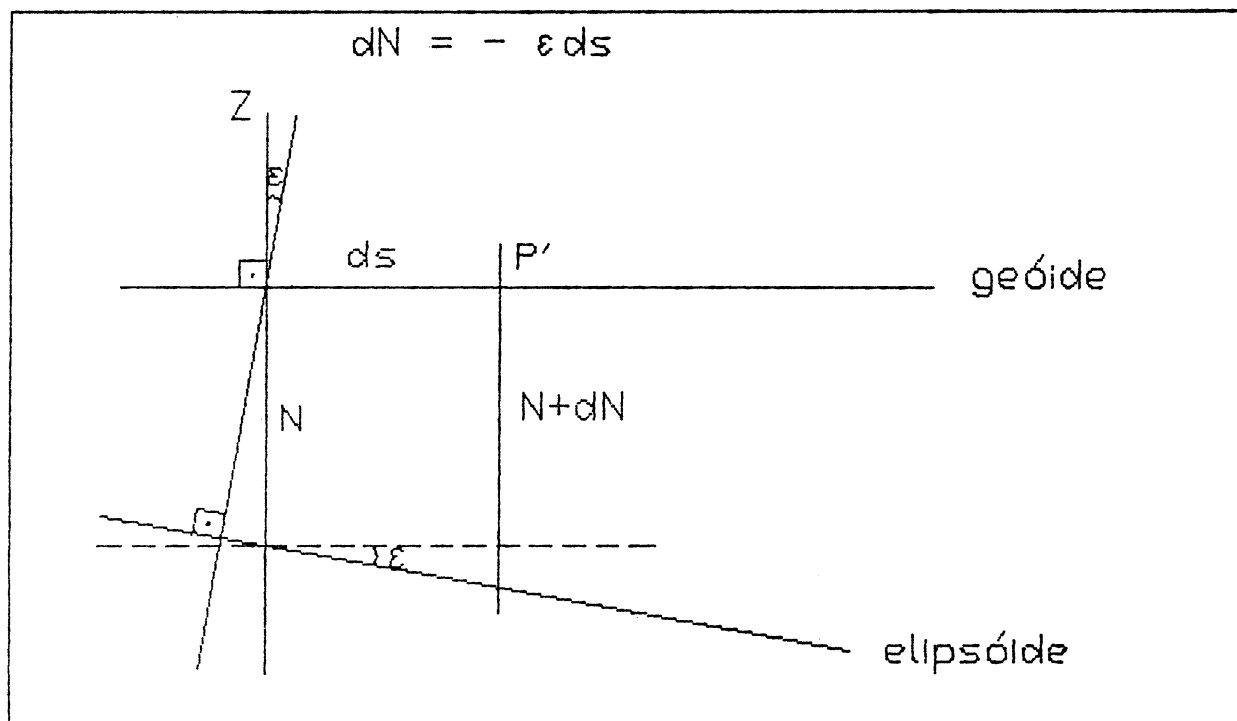


Fig. II.3.1.1 Interseções do geóide e do elipsóide por um plano vertical de azimuth arbitrário.

$$\xi = - \frac{dN}{ds_{\varphi}} = - \frac{1}{R} \frac{\partial N}{\partial \varphi} \quad (\text{II.44})$$

$$\eta = - \frac{dN}{ds_{\lambda}} = - \frac{1}{R \cos \varphi} \frac{\partial N}{\partial \lambda} \quad (\text{II.45})$$

que dão as relações das componentes do desvio no meridiano e primeiro vertical com a ondulação geoidal.

Como N pode ser expresso pela integral de Stokes, equação (II.36), nosso problema é derivá-lo em relação a  $\varphi$  e  $\lambda$ . Para este propósito usamos a fórmula (II.36):

$$N(\varphi, \lambda) = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_S S(\psi) \Delta g(d\varphi', d\lambda') \cos \varphi' d\varphi' d\lambda' \quad (\text{II.46})$$

onde  $\psi$  é função de  $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $\varphi'$  e  $\lambda'$ , e  $\varphi'$  e  $\lambda'$  são as coordenadas do ponto de integração.

Pela derivação em relação a  $\varphi$  e a  $\lambda$  encontramos:

$$\frac{\partial N}{\partial \varphi} = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_S \frac{\partial S(\psi)}{\partial \varphi} \Delta g(\varphi', \lambda') \cos \varphi' d\varphi' d\lambda' \quad (\text{II.47})$$

$$\frac{\partial N}{\partial \lambda} = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_S \frac{\partial S(\psi)}{\partial \lambda} \Delta g(\varphi', \lambda') \cos \varphi' d\varphi' d\lambda' \quad (\text{II.48})$$

Da derivada de função composta temos que:

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = \frac{dS}{d\psi} \frac{d\psi}{d\varphi} \quad \text{e} \quad \frac{\partial S}{\partial \lambda} = \frac{dS}{d\psi} \frac{d\psi}{d\lambda} \quad (\text{II.49})$$

Escrevendo  $\psi$  na forma:

$$\cos\psi = \sin\varphi \sin\varphi' + \cos\varphi \cos\varphi' \cos(\lambda' - \lambda) \quad (\text{II.50})$$

e derivando sucessivamente em relação a  $\varphi$  e a  $\lambda$  obtemos:

$$\begin{aligned} -\sin\psi \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} &= \cos\varphi \sin\varphi' - \sin\varphi \cos\varphi' \cos(\lambda' - \lambda) \\ -\sin\psi \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} &= \cos\varphi \cos\varphi' \sin(\lambda' - \lambda). \end{aligned} \quad (\text{II.51})$$

Agora, introduziremos o azimute  $A$ , como mostra a Fig.II.3.1.2. Do triângulo esférico da mesma figura, usando as fórmulas conhecidas da trigonometria esférica, "cinco elementos" e "analogia dos senos", podemos escrever:

$$\begin{aligned} \sin\psi \cos A &= \cos\varphi \sin\varphi' - \sin\varphi \cos\varphi' \cos(\lambda' - \lambda) \\ \sin\psi \sin A &= \cos\varphi' \sin(\lambda' - \lambda). \end{aligned} \quad (\text{II.52})$$

Substituindo (II.52) nas (II.51) obtemos as expressões

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = -\cos A \quad \text{e} \quad \frac{d\psi}{d\lambda} = -\cos\varphi \sin A \quad (\text{II.53})$$

e aplicando em (II.49)

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(\psi)}{\partial\varphi} &= - \frac{dS(\psi)}{d\psi} \cos A \\ \frac{\partial S(\psi)}{\partial\lambda} &= - \frac{dS(\psi)}{d\lambda} \cos\varphi \sin A. \end{aligned} \quad (\text{II.54})$$

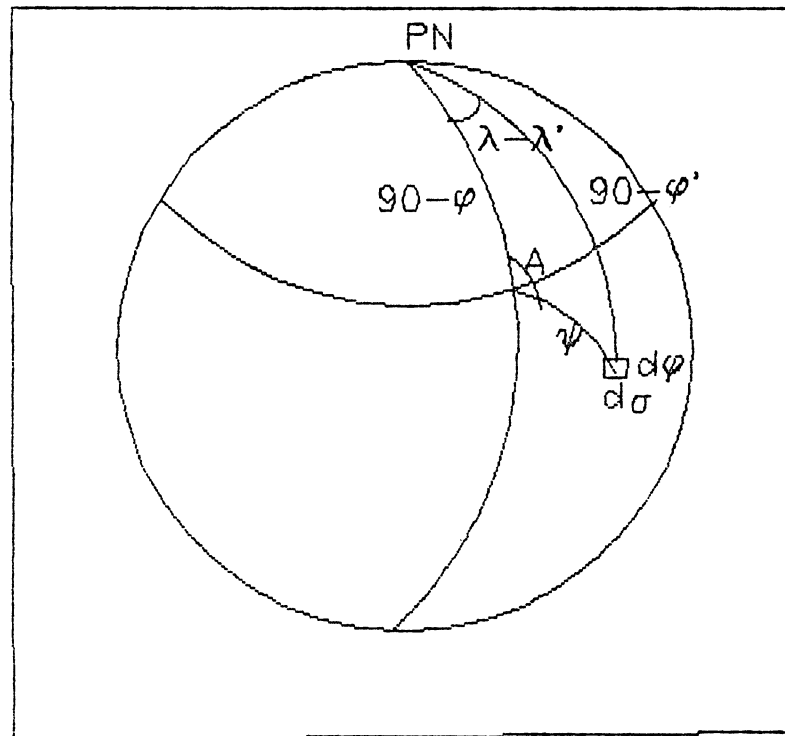


Fig.II.3.1.2 Relação entre coordenadas geográficas e polares.



Finalmente, substituindo em (II.47) e (II.48), chegamos a:

$$\xi(\varphi, \lambda) = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_S \Delta g(\varphi', \lambda') \frac{dS(\psi)}{d\psi} \cos A \cos \varphi' d\varphi' d\lambda' \quad (\text{II.55})$$

$$\eta(\varphi, \lambda) = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_S \Delta g(\varphi', \lambda') \frac{dS(\psi)}{d\psi} \sin A \cos \varphi' d\varphi' d\lambda'$$

ou na forma abreviada com  $d\sigma = \cos \varphi' d\varphi' d\lambda'$

$$\varepsilon = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} \Delta g \frac{dS}{d\psi} \cos A d\sigma \quad (\text{II.56})$$

$$\eta = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} \Delta g \frac{dS}{d\psi} \sin A d\sigma$$

Estas são as fórmulas de Vening-Meinesz. Derivando a função de Stokes  $S(\psi)$ , com relação a  $\psi$  obtemos a função de Vening-Meinesz

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\psi} &= - \frac{\cos(\psi/2)}{2\sin^2(\psi/2)} + 8\sin \psi - 6\cos \psi/2 + \\ &- 3 \frac{1 - \sin \psi/2}{\sin \psi} + 3 \sin \psi \ln[ \sin \psi/2 + \sin^2 \psi/2 ]. \end{aligned} \quad (\text{II.57})$$

O azimute  $A$  é dado pela fórmula:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\cos \varphi' \sin(\lambda' - \lambda)}{\cos \varphi \sin \varphi' - \sin \varphi \sin \varphi' \cos(\lambda' - \lambda)} \quad (\text{II.58})$$

que é consequência imediata das (II.52).

A fórmula (II.55), como a fórmula de Stokes, pode também ser expressa em função das coordenadas esféricas polares  $\psi$  e  $A$ :

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{A=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\pi} \Delta g(\psi, A) \cos A \frac{dS}{d\psi} \sin\psi \, d\psi \, dA \\ \eta &= \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{A=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\pi} \Delta g(\psi, A) \sin A \frac{dS}{d\psi} \sin\psi \, d\psi \, dA.\end{aligned}\tag{II.59}$$

As fórmulas de Vening-Meinesz são válidas para qualquer elipsóide de referência geocêntrico enquanto que a fórmula de Stokes deve ser modificada pela adição de uma constante  $N_o$  quando o elipsóide não tiver a mesma massa que a Terra e  $W_o \neq U_o$ . Se derivarmos a fórmula da Stokes em relação a  $\varphi$  e  $\lambda$ , para obter as fórmulas de Vening-Meinesz, então estas constantes desaparecerão e obteremos as fórmulas (II.57).

As fórmulas  $\frac{dS}{d\psi}$  e as fórmulas relativas estão tabeladas em Sollins [32].

### II.3.2 ESSÊNCIA DO MÉTODO

A debilidade do Método Astro-Geodésico visto anteriormente está na interpolação linear do desvio astro-geodésico entre quaisquer dois pontos adjacentes. Portanto é necessário ter estes pontos de desvio tão próximos quanto possível.

Uma forma para superar a necessidade de se ter tantos pontos astro-geodésicos é usar o conhecimento do campo da gravidade local para suplementar estes pontos, com auxílio da fórmula de Vening-Meinesz.

Seja  $\sigma$  uma região gravimetricamente conhecida e no seu interior uma sub-região  $\sigma_0$ , tão pequena que possamos considerá-la plana e que contenha pelo menos três pontos astro-geodésicos. E  $\Sigma$  a região exterior a  $\sigma$ , onde o campo gravimétrico é desconhecido, o que nos impede de calcular a sua influência gravimétrica sobre as estações P e Q situados na sub-região  $\sigma_0$ .

Numa primeira aproximação é possível admitir que a influência da região  $\Sigma$  seja igual em P e Q, ou com um erro menor, que ela varie linearmente no interior desta sub-região.

Representaremos por  $\Theta(p)$  o desvio gravimétrico total ou interpolado em P e por  $\Theta(p, \sigma)$  o desvio gravimétrico no ponto P devido à influência da região  $\sigma$ .

Resulta das considerações anteriores e da Fig. II.3.2.1 que:

$$\Theta(R) = \Theta(R, \sigma) + \Theta(R, \Sigma) =$$

$$\Theta(R, \sigma) + \Theta(P, \Sigma) + [\Theta(Q, \Sigma) - \Theta(P, \Sigma)] \frac{d_1}{d} \quad (\text{II.60})$$

Podemos calcular a influência astro-geodésica da região  $\Sigma + \sigma$  e considerar a influência da região  $\Sigma$  como sendo a diferença desta influência e a influência gravimétrica da região  $\sigma$ .

$$\Theta(P, \Sigma) = \Theta(P, \Sigma + \sigma) - \Theta(P, \sigma)$$

(II.61)

$$\Theta(Q, \Sigma) = \Theta(Q, \Sigma + \sigma) - \Theta(Q, \sigma)$$

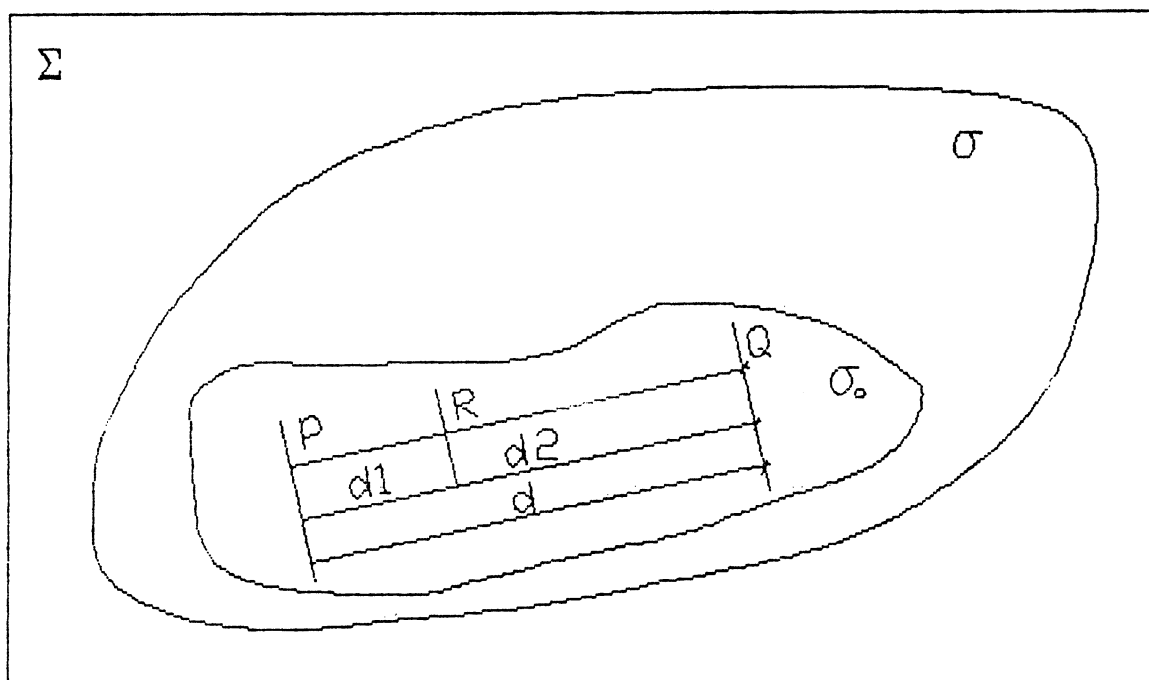


Fig. II.3.2.1 Divisão de região para cálculo dos desvios interpolados.

Introduzindo as (II.61) na (II.60) obtemos:

$$\Theta(R) = \Theta(R, \sigma) + \Theta(P, \Sigma + \sigma) - \Theta(P, \sigma) + \\ + [\Theta(Q, \Sigma + \sigma) - \Theta(Q, \sigma)] \frac{d_1}{d} - [\Theta(p, \Sigma + \sigma) - \Theta(p, \sigma)] \frac{d_1}{d},$$

que simplificada apresenta a forma:

$$\Theta(R) = \Theta(R, \sigma) + \frac{d_2}{d} [\Theta(P, \Sigma + \sigma) - \Theta(P, \sigma)] + \\ + \frac{d_1}{d} [\Theta(Q, \Sigma + \sigma) - \Theta(Q, \sigma)]. \quad (II.62)$$

Desde que possamos considerar a região  $\sigma_0$  plana, um ponto  $P_i$  sobre a mesma pode ser definida pelas coordenadas cartesianas retangulares planas  $(x_i, y_i)$  e façamos:

$$\Theta(P_i, \sigma) = A x_i + B y_i + C.$$

Havendo mais de três pontos astro-geodésicos, ou seja  $i > 3$ , fisicamente e gravimetricamente conhecidos, podemos aplicar o Método dos Mínimos Quadrados para calcular os coeficientes A, B e C considerados constantes em  $\sigma$  e desta forma calcular

$$\Theta(R) = \Theta(R, \sigma) + A x + B y + C.$$

### II.3.3. GEÓIDE ASTRO-GRAVIMÉTRICO

Temos conhecimento do geóide calculado astro-gravimetricamente na Rússia [22], onde se originou o método,

na Alemanha [35], no Canadá [21] e na região vizinha ao datum sul-americano Chuá no Brasil [30].

## II.4.MÉTODO CELESTE

### II.4.1.INTRODUÇÃO

Desde o lançamento dos satélites, aumentaram sensivelmente as informações sobre o geóide. O rastreamento dos mesmos em órbita no espaço, possibilita a investigação do campo gravitacional da Terra, através das determinações dos coeficientes dos harmônicos esféricos para estabelecer o potencial gravitacional.

Quanto melhor a qualidade dos coeficientes determinados, assim como o número dos mesmos, melhor será a aproximação do potencial gravitacional, e conseqüentemente a precisão na determinação da ondulação geoidal.

A qualidade destes coeficientes depende, entre outros fatores, das técnicas de observação usadas e das órbitas dos satélites artificiais. Para determinar harmônicos de alto grau, é necessário observar satélites em órbitas próximas da Terra, aumentar o número dos satélites rastreados e estes devem apresentar diferentes inclinações.

Nas seções seguintes, referentes ao Método Celeste, partimos do pressuposto de que estes coeficientes já foram determinados.

## II.4.2 ONDULAÇÃO GEOIDAL CALCULADA ATRAVÉS DAS HARMÔNICAS ESFÉRICAS

O geopotencial  $W$ , em harmônicos esféricos pode ser escrito como

$$W = \frac{kM}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{a}{r} \right]^n \left[ \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \psi) \right] \right\} + W_R \quad (\text{II.63})$$

onde  $kM$  é a constante gravitacional geocêntrica;  $r$  é o raio geocêntrico;  $\psi$  é a latitude geocêntrica;  $\lambda$  é a longitude geocêntrica;  $\bar{C}_{nm}$  e  $\bar{S}_{nm}$  são os coeficientes potencial plenamente normalizados;  $a$  é o fator de escala associado aos coeficientes; e  $W_R$  o potencial de rotação.

O esferopotencial no mesmo ponto do geóide escreve-se [11]

$$U = \frac{kM}{r} \left[ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^{2n} \bar{C}_{2n}^* \bar{P}_{2n}(v) \right] + U_R \quad (\text{II.64})$$

onde  $U_R$  representa o potencial de rotação e o asterisco servindo apenas para lembrar que os coeficientes do esferopotencial são calculados ao contrário dos coeficientes do geopotencial que são determinados empiricamente. Por subtração das expressões supra obtém-se o potencial perturbador, limitando, no esferopotencial o desenvolvimento a  $n=2$ , usando a fórmula de Bruns além de pequenas aproximações como  $a \cong r \cong R$  e  $\gamma = kM/R^2$ , resulta:

$$N = R \left[ (\bar{C}_2 - \bar{C}_2^*) \bar{P}_2(v) + (\bar{C}_4 - \bar{C}_4^*) \bar{P}_4(v) + \sum_{m=1}^2 \bar{C}_{2m} \bar{P}_{2m}(v) + \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=1}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(v) \right] \quad (\text{II.65})$$

A validade da fórmula de Bruns exige que se verifiquem os postulados: a) geopotencial no geóide deve ser igual ao esferopotencial no elipsóide; b) a massa da Terra deve ser igual a massa da Terra Normal. A não observância desses requisitos exige a introdução na expressão anterior do termo

$$N_o = \frac{k\Delta M}{R \gamma} - \frac{\Delta W}{\gamma} \quad (II.66)$$

onde  $\Delta M$  representa a diferença entre a massa da Terra e a massa da Terra Normal e  $\Delta W$  a diferença entre o geopotencial e o esferopotencial.



### II.4.3 ALTIMETRIA POR SATÉLITE

O radar altimétrico a bordo do satélite mede a distância do satélite ao nível instantâneo do oceano. Entre os dados fornecidos pelo satélite altimétrico, devem constar: a posição do satélite, o instante referente a esta posição e informações relativas às condições meteorológicas. Estes dados podem ser analisados para uma determinação geométrica da superfície topográfica do oceano ou do geóide, assim como obter detalhes do campo gravífico [28].

Pode-se calcular a distância  $h_o$  da superfície instantânea do oceano ao elipsóide de referência, pela equação:

$$h_o = h - (A + R + b) \quad (\text{II.67})$$

onde  $h$  é a distância do altímetro ao elipsóide de referência; os elementos orbitais propiciam a distância do satélite ao centro do elipsóide, de excentricidade " $e$ ", e desta distância subtraímos  $r_e$  calculado por

$$r_e = \frac{a \sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi}}, \quad (\text{II.68})$$

obtendo  $h$ ;  $A$  é a medida altimétrica,  $R$  a correção da refração e  $b$  a incerteza a priori do altímetro.

Se admitirmos o geóide coincidente com o nível instantâneo do oceano, então  $h_o$  seria a ondulação geoidal; isto corresponderia a uma precisão na determinação do geóide inferior a um metro; podemos calcular a ondulação  $N$  em função de  $h_o$  e da altitude  $t$  da superfície instantânea do oceano, desde que

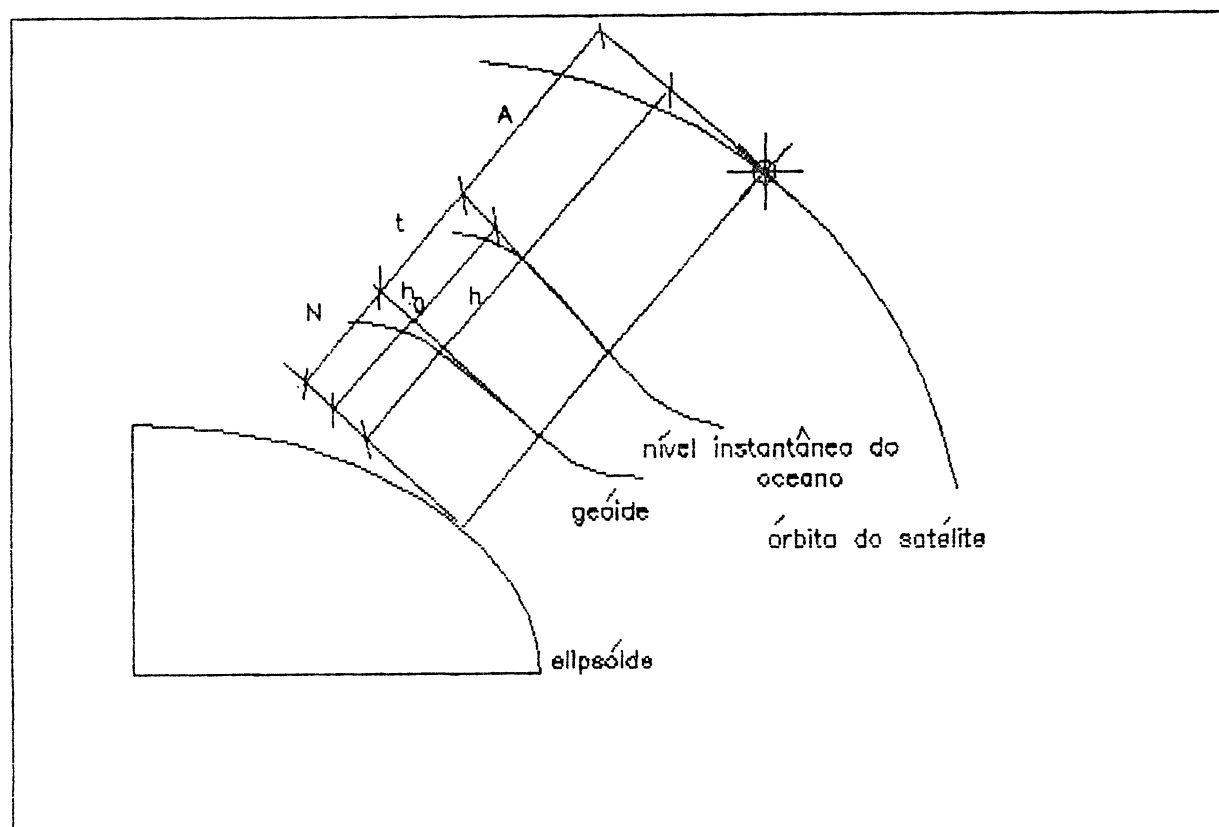


Fig. II.4.3.1 Posição do satélite com relação às superfícies: oceânica, geoidal e elipsoidal.

consideremos as duas superfícies paralelas dentro de uma certa região. Pela Fig.II.4.3.1 podemos escrever:

$$h_o = N + t.$$

Isolando a ondulação geoidal  $N$  de  $t$ , que requer informações oceânicas adicionais, geralmente fornecidas pelos oceanógrafos, obtemos:

$$N = h_o - t.$$

Em 1977, Kearsley calculou a ondulação geoidal a partir de altimetria do GEOS-3 [17].

#### II.4.4 MÉTODO CELESTE ALTERNATIVO

Rastreando satélite NNSS, Navy Navigation Satellite System, ou GPS-NAVSTAR, Global Positioning System - NAVigation System using Time And Ranging, a partir de referências de nível

$$N \cong H - h.$$

A não exatidão da igualdade deve-se ao fato de que a altitude geométrica ( $H$ ) e a ortométrica ( $h$ ) não serem rigorosamente colineares [10], conforme Fig.II.4.4.1.

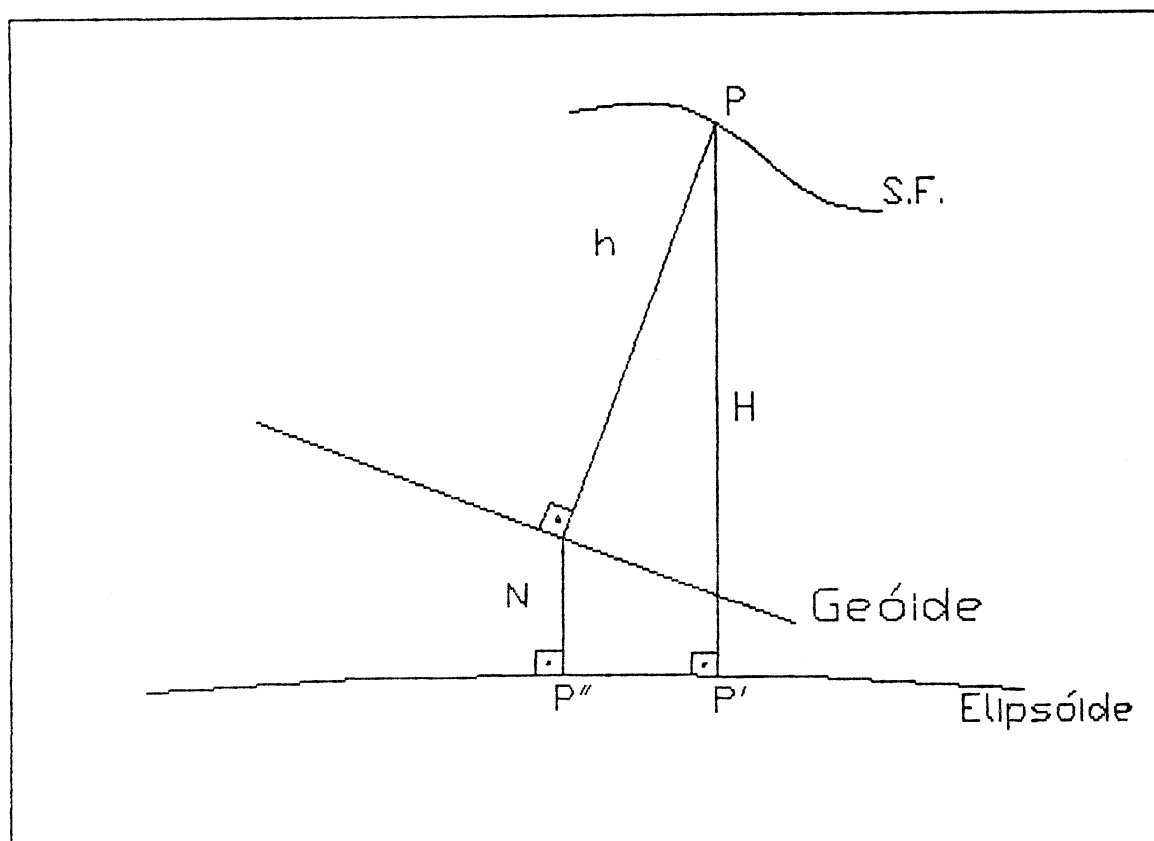


Fig. II.4.4.1 Altitudes ortométrica e geométrica.

## II.5. MÉTODO COMBINADO

Os satélites geodésicos estão em órbita a uma certa distância da Terra, portanto não são influenciados pelas pequenas massa anômalas regionais. Por esta razão, podemos afirmar que o método que emprega harmônicos esféricos não fornece uma informação detalhada do geóide, mas apenas informações globais.

As anomalias da gravidade e o desvio da vertical calculado por observações terrestres são influenciados por estas pequenas massas. Portanto, os métodos terrestres são melhores para fornecer as informações regionais. Porém apresentam desvantagem de não conhecermos os dados distribuídos continua e uniformemente sobre toda a superfície da Terra.

O método usado para determinar o geóide com maior precisão, denominado método combinado, reúne os métodos anteriormente citados de forma complementar, visto que esses apresentam vantagens e desvantagens.

A ondulação geoidal  $N$  pode ser considerada como soma de três parcelas [28],

$$N = N_1 + N_2 + N_3, \quad (\text{II.69})$$

onde  $N_1$  é calculado através de harmônicos esféricos, pela fórmula

$$N_1 = \frac{kM}{\gamma r} \sum_{n=2}^{l_{\max}} \left( \frac{a}{r} \right)^n \left( \sum_{m=0}^n \bar{C}_{nm}^* \cos m\lambda + \bar{S}_{nm}^* \sin m\lambda \right) \bar{P}_{nm}(\sin \psi),$$

onde  $l_{\max}$  é o maior grau disponível dos coeficientes harmônicos esféricos.

A parcela  $N_2$  é calculada pela fórmula de Stokes

$$N_2 = \frac{R}{4\pi G} \int \int_{\sigma_c} (\overline{\Delta g_F} - \overline{\Delta g_S}) S(\psi) d\sigma \quad (II.70)$$

onde  $R$  é o raio médio da Terra,  $G$  o valor da gravidade média,  $\overline{\Delta g_F}$  a anomalia free-air e  $\overline{\Delta g_S}$  a anomalia média calculada através dos coeficientes harmônicos esféricos implicadas em (II.63),  $\sigma_c$  é a calota limitada com centro no ponto de cálculo e amplitude  $\Psi_c$ .

O valor de  $\Delta g_S$  é calculado por

$$\Delta g_S = \frac{kM}{r^2} \sum_{l=2}^{l_{\max}} (l-1) \left( \frac{a}{r} \right)^l \sum_{m=0}^l \left( \overline{G}_{lm}^* \cos m\lambda + \overline{S}_{lm} \sin m\lambda \right) \overline{P}_{lm}(\sin \varphi) \quad (II.71)$$

O termo  $N_3$  é calculado por

$$N_3 = \frac{R}{4\pi G} \int \int_{\sigma - \sigma_c} (\overline{\Delta g_F} - \overline{\Delta g_S}) S(\psi) d\sigma, \quad (II.72)$$

onde  $\sigma - \sigma_c$  representa o globo subtraído da calota  $\sigma_c$ , escolhido de tal forma que este termo possa ser negligenciável.

O Método Combinado usando harmônicos esféricos e gravimetria foi aplicado em 1972, por Talwani para calcular o geóide no Atlântico Norte, em 1973 por Kahle e Talwani para o Oceano Índico e, no mesmo ano por Vicente e Marsch para todo o globo. Em 1973 Rapp [24] calculou a ondulação geoidal combinando dados gravimétricos e

celestes, usando princípio Colocação por Mínimos Quadrados. Em 1975, Rapp e Rummel [28] calcularam a ondulação geoidal usando coeficientes do GEM-6 truncado ao grau 16 e calota de tamanho  $20^{\circ}$ .

CAPÍTULO III  
OUTROS MÉTODOS  
III.1.INTRODUÇÃO

O cálculo da ondulação geoidal N pode ser formulado como um problema de valor de contorno abaixo.

Sendo T o potencial perturbador, resolver a equação diferencial de Laplace

$$\nabla^2 T = 0$$

no exterior da esfera de raio R, com as condições de contorno:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} T(r) = 0 \quad \text{para } r \rightarrow \infty$$

e

$$\Delta g = - \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2T}{R} \quad \text{sobre a esfera.}$$

Resolvido este problema, aplicamos a equação de Bruns para calcular a ondulação geoidal, isto é

$$N = \frac{T}{G}$$

onde G é o valor médio da gravidade normal  $\gamma$ .

A seguir apresentamos dois métodos para resolver o problema de valor de contorno.



## III.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

### III.2.1 ALGUNS ASPECTOS HISTÓRICOS E APLICAÇÕES NA GEODÉSIA

O Método dos Elementos Finitos tem atraído atenção devido a sua generalização e riqueza de idéia delineando o método. Tem também sido usado com sucesso marcante para resolver inúmeros problemas em Engenharia e Física Matemática [23].

Apesar do nome "Método dos Elementos Finitos" aparecer pela primeira vez em 1960, quando foi usado por Clough [38] no trabalho sobre problema de elasticidade plana, as idéias da análise do Método dos Elementos Finitos vêm sendo usadas há muito tempo.

Em 1941, Hrenikoff [23] introduziu seu "Método Estrutural", que é a representação de uma estrutura contínua como uma coleção de elementos discretos compostos por barras e vigas, este método é o precursor do método discreto geral.

Em 1943, Courant [23] apresentou uma solução aproximada do problema de torsão Saint Venant, na qual ele usa funções contínuas por partes, definidas sobre domínio triangular, e o Princípio de Energia Potencial Mínima.

Passou-se aproximadamente uma década, sem que as idéias de discretização fossem usadas novamente. Em 1952, os trabalhos de Polya, Hersch e Weinberg [13], enfocaram atenção sobre problemas de auto-valores, o que marcou um período de interesse renovado.

Em 1954, Argyris [38] e seus colaboradores começaram uma série de trabalhos, nos quais desenvolveram certas generalizações da teoria linear de estruturas, e apresentaram procedimentos para análise de configuração estrutural discreta complicada em forma facilmente adaptável a computadores digitais.

No princípio de 1960, os trabalhos significantes de White e Friedrichs [38], apresentaram o uso de elementos triangulares para desenvolver equações diferenciais a partir dos princípios variacionais. Apesar destes usarem malhas regulares, reconheceram a necessidade de dar tratamento especial a contornos irregulares.

Desde então o Método dos Elementos Finitos tem sido utilizado de maneira ampla em engenharia. Centenas de trabalhos e livros têm sido publicados sobre o assunto. Apesar da maioria destas literaturas tratarem de análises estruturais, o número de aplicações a outros componentes têm crescido bastante.

No campo da Geodésia alguns autores vêm investigando aplicações do Método dos Elementos Finitos e a seguir citamos alguns destes trabalhos.

Em 1979, Junkins [15], Junkins e Engel [16] aplicaram o Método dos Elementos Finitos para modelar o campo da gravidade no sentido de aproximar uma função conhecida. O potencial da gravidade  $W$  foi decomposto em duas partes: a primeira parte de caráter global do potencial,  $W_{ref}$ , representada por uma série de harmônicos esféricos truncada até a ordem vinte e três e a segunda parte de caráter local,  $\delta W$ , calculada pelo método dos elementos finitos, representada por série de funções base

independentes definida por partes. As funções base foram os polinômios de Tchebyshev e polinômios ortogonalizados. Da maneira em que foram considerados no modelo da gravidade, conduz a um rápido cálculo dos coeficientes pelo procedimento mínimos quadrados.

Em 1980, Schmidt [33] afirma que, no amplo campo da Geodésia, existem muitas possibilidades de usar o Método dos Elementos Finitos em interpolação pura.

Em 1981, Meissl [20] resolveu o problema de Dirichlet para o caso plano, ou seja, calculou o potencial perturbador  $T$  do problema de contorno

$$\nabla^2 T = 0 \quad \text{para } r \geq 0$$

$$T = T_0 \quad \text{para } r = 1$$

sendo  $\Omega$  a região  $r \geq 1$  e  $\Gamma$  seu contorno. Usando elementos finitos retangulares obteve solução comparável ao cálculo de  $T$  por harmônicos esféricos para  $n \leq 3$ , usando para função de forma polinômios de Hermite cúbica e de quinto grau.

Em 1988, Baker [1] investigou o problema

$$\begin{aligned} \nabla^2 T &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ \lim_{r \rightarrow \infty} T(r) &= 0 \end{aligned}$$

com as condições de contorno

$$\Delta g = - \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2T}{R} \quad \text{em } \Gamma,$$

aplicando uma formulação variacional da equação de Laplace para o caso tri-dimensional.

### III.2.2.DESCRICÃO DO MÉTODO

O Método dos Elementos Finitos é uma técnica geral para construir solução aproximada de problemas de valores de contorno.

O método envolve a divisão do domínio  $\Omega$  do problema em um número finito de sub-regiões  $\Omega^e$ , chamadas elementos finitos, e usa o conceito variacional para construir uma aproximação da solução sobre a coleção de elementos finitos.

Consideremos o problema de encontrar uma função  $\varphi$  sobre o domínio  $\Omega$ , que satisfaça a seguinte equação diferencial

$$L\varphi + P = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (\text{III.1})$$

onde  $L$  é um operador diferencial linear e  $P$  é independente de  $\varphi$ . A solução  $\varphi$ , incógnita da equação diferencial, também satisfaz a condição de contorno

$$M\varphi + R = 0 \quad \text{em } \Gamma \quad (\text{III.2})$$

sendo  $M$  um operador diferencial linear,  $R$  independente de  $\varphi$  e  $\Gamma$  o contorno da região  $\Omega$ .

Para resolver o nosso problema, reformula-se o problema de valor de contorno, numa maneira a "enfraquecer" as condições sobre a solução e suas derivadas. Tais reformulações são chamadas formulação "fraca" ou variacional do problema e são designadas para acomodar dados irregulares e soluções irregulares.

Pode-se provar que toda solução clássica suave do problema, esta é também solução com formulação fraca [29]. Assim nada perdemos na reformulação fraca.

Assumiremos que a solução pode ser aproximada por uma série de funções  $N_i$  satisfazendo as condições de contorno essenciais, isto é, as condições de Dirichlet, mas com certos parâmetros a determinar  $a_i$

$$\hat{\varphi}(P) = \sum_{i=1}^m a_i N_i^e(P), \quad P \in \Omega^e \quad (\text{III.3})$$

as funções  $N_i^e$  são denominadas funções base.

Em geral,  $\hat{\varphi}(P)$  não satisfaz exatamente a equação diferencial (III.1) e/ou as condições de contorno (III.2). Portanto, conduz a dois resíduos

$$R_\Omega = L \hat{\varphi} + P \quad \text{em } \Omega \quad (\text{III.4})$$

$$R_\Gamma = M \hat{\varphi} + R \quad \text{em } \Gamma \quad (\text{III.5})$$

Uma formulação fraca do problema (III.1), através de (III.2) é encontrar a função  $\varphi$  tal que a equação diferencial, junto com as condições do contorno, sejam satisfeitas no sentido dos resíduos ponderados

$$\int_\Omega W_i R_\Omega d\Omega + \int_\Gamma \bar{W}_i R_\Gamma d\Gamma = 0 \quad i=1,2,\dots,m \quad (\text{III.6})$$

onde  $W_i$  e  $\bar{W}_i$  são funções peso tais que sejam suficientemente bem comportadas para que as integrais tenham sentido. A distinção entre  $W_i$  e  $\bar{W}_i$  indica a possibilidade de usar pesos diferentes aos resíduos da equação diferencial e das condições de contorno. As

funções peso do problema variacional (II.6) pertencem a classe  $\bar{H}$ , podem não pertencer a mesma classe da função base  $H'$ . O fato destas classes serem diferentes conduz a falta de simetria na formulação que queremos evitar.

A classe  $H_0^1$  é uma classe de funções com as propriedades seguintes: o índice superior significa que elementos  $v$  desta classe admitem derivadas de primeira ordem, que são quadrado integráveis sobre o intervalo aberto  $(0,1)$ ; o índice inferior indica que  $v=0$  em  $x=0$  e em  $x=1$ .

A classe  $H_0^1 = \bar{H} = H$  é também chamada classe de funções admissíveis para o problema variacional (III.1) e (III.2), desde que ela contenha somente aquelas funções que satisfaçam as condições de contorno e sejam suficientemente regulares para que as integrais (III.6) façam sentido.

As condições (III.6) conduzem a uma sistema de equações lineares em  $a_j$

$$K_{ij} a_j = f_i \quad i, j = 1, 2, \dots, m \quad (\text{III.7})$$

com

$$K_{ij} = \int_{\Omega} W_i L N_j d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_i M N_j d\Gamma \quad (\text{III.8})$$

e

$$f_i = \int_{\Omega} W_i P d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_i R d\Gamma \quad (\text{III.9})$$

A formulação variacional (III.6), não é a mais conveniente para os propósitos computacionais e teóricos. Portanto deduziremos uma formulação alternativa fraca simétrica aplicando uma integração por partes à condição dos resíduos poderados. A forma fraca da primeira integral na equação (III.8) pode ser

$$\int_{\Omega} W_i L N_j d\Omega = \int_{\Omega} L_1 W_i L_2 N_j d\Omega + \int_{\Gamma} W_i L_3 N_j d\Gamma \quad (\text{III.10})$$

onde  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  são operadores diferenciais lineares de uma ordem menor que o operador original  $L$ . A vantagem de uma formulação fraca é relaxar a restrição de continuidade sobre o conjunto de funções base na qual a aproximação é expandida, desta forma aumenta a classe de dados para o qual esta formulação do problema faz sentido.

Existem duas propriedades fundamentais de  $H_0^1$ , entre aquelas anteriormente citadas, a primeira que seja um espaço linear de funções, e a segunda que a dimensão seja infinita.

O método de Galerkin consiste em procurar soluções aproximadas do problema variacional (III.10) num sub-espaço de dimensão  $m$ ,  $H_0^{(m)}$ , do espaço  $H_0^1$ . Assim, no lugar de atacar o problema de dimensão infinita (III.10), procuramos uma solução aproximada  $\hat{\varphi}$  em  $H_0^{(m)}$  da forma (III.3) que satisfaça (III.10) em  $H_0^{(m)}$  substituindo  $H_0^1$ . Em outras palavras, a formulação variacional do problema aproximado é assim encontrar  $\hat{\varphi} \in H_0^{(m)}$  tal que

$$\int_{\Omega} L_1 W_i L_2 N_j d\Omega + \int_{\Gamma} W_i L_3 N_j d\Gamma + \int_{\Gamma} \bar{W}_i R_j N_j d\Gamma + \int_{\Omega} W_i P d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_i R d\Gamma = 0$$

para todo  $w \in H_0^{(m)}$ .

Como  $\varphi_i$  são conhecidos,  $\hat{\varphi}$  será completamente determinado uma vez que os coeficientes  $a_i$  em (III.3) sejam determinados. Os  $a_i$  em (III.3) são referidos como graus de liberdade da aproximação.

Para determinar os valores  $a_i$ , devemos resolver o sistema de equações lineares

$$K_{ij} a_i = f_j \quad i, j = 1, 2, \dots, m$$

com

$$K_{ij} = \int_{\Omega} L_1 W_i L_2 d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_i L_3 N_j d\Gamma + \int_{\Gamma} \bar{W}_i M N_j d\Gamma$$

e

$$f_i = \int_{\Omega} W_i P d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_i R d\Gamma$$

As "matrizes de rigidez" e o "vetor força",  $K$  e  $f$ , respectivamente, são obtidos somando as matrizes  $K^e$  e  $f^e$  dos elementos apropriadamente.

Enquanto o Método de Galerkin não fornece uma maneira sistemática para construir função base  $N_i$ , o Método dos Elementos Finitos provê uma técnica sistemática de construção das funções base para aproximação Galerkin do problema de valor de contorno. A idéia principal é que a função base  $N_i$  pode ser definida por partes sobre a sub-região do domínio (funções de suporte compacto) e que sobre qualquer sub-domínio, os  $N_i$  podem ser escolhidos funções bem simples tais como polinômios de baixo grau.

Para construir tal conjunto de funções base por partes, primeiro particionamos o domínio do nosso problema em um número finito de elementos. Dentro de cada elemento, certos pontos são identificados e chamados de nós ou pontos nodais, que têm um papel importante na construção de elementos finitos. A coleção de elementos e pontos nodais caracterizando o domínio do problema apropriado é chamado malha de elementos finitos.

Tendo construído a malha de elementos finitos para o nosso modelo, prosseguimos a construção de um correspondente conjunto de função base usando os seguintes critérios fundamentais:



- (1) As funções base são geradas por funções simples definidas por partes, para cada elemento sobre a malha de elementos finitos.
- (2) As funções são suaves o suficiente para ser membro da classe  $H_0^{(1)}$  de funções teste.
- (3) As funções base são escolhidas de tal maneira que os parâmetros  $a_i$  definindo a solução aproximada  $\hat{\varphi}$  são precisamente os valores de  $\varphi$  nos pontos nodais.

Não é necessário modelar  $\varphi$  identicamente em todos os elementos; conjuntos de elementos de função base diferentes podem ser usados em áreas onde o comportamento de  $\varphi$  é diferente.

A continuidade da aproximação de um sub-domínio ao outro é atingida resolvendo para valores únicos dos parâmetros nos nós da malha onde as funções base de elementos adjacentes são conectados. Desta maneira, a continuidade da derivada de qualquer ordem pode ser reforçada.

Examinemos algumas propriedades fundamentais da "matriz de rigidez"  $K$  e do "vetor de carga"  $F$ .

(1) Somabilidade da "rigidez". Esta talvez seja a propriedade mais importante da matriz de rigidez calculada por elementos finitos.

Sejam os termos  $K_{ij}^e$  representantes da componente da matriz de rigidez do elemento finito  $\Omega_e$ . Assim

$$K_{ij} = \sum_e K_{ij}^e$$

Similarmente

$$F_i = \sum_{\Omega} F_i^{\Omega}$$

onde  $F_i$  é a componente do vetor de carga do elemento finito  $\Omega$ .

O fato de  $K_{ij}$  e  $F_i$  poderem ser calculados como soma das contribuições para cada elemento é o aspecto chave do Método dos Elementos Finitos. Por causa desta propriedade, é possível gerar  $K$  e  $F$  calculando somente as matrizes dos elementos  $K^{\Omega}$  e  $F^{\Omega}$  para elemento típico  $\Omega$  e então construir  $K$  e  $F$  como soma indicada acima.

(2) Esparsidade de  $K$ : Como  $\varphi_i$  e suas derivadas são diferentes de zero somente em elementos  $\Omega_i$  e adjacentes. Seus produtos serão diferentes de zero somente onde os suportes para função base se entrelaçam. Segue-se que se os nós  $i$  e  $j$  não pertencem ao mesmo elemento então  $K_{ij}=0$ . Isto implica que numa malha com muitos elementos a maioria das entradas  $K_{ij}$  será zero, isto é, a matriz de rigidez será esparsa, e é a nossa particular escolha da função base dos elementos finitos  $N_i$  que conduz a esparsidade de  $K$ .

A estrutura final da matriz de rigidez  $K$  é notável. Se numerarmos os nós sequencialmente, de uma maneira conveniente, as entradas não-zero aparecem mais próximas da diagonal. Fora desta banda de termos não nulos, todas entradas serão zero. Matrizes deste tipo são chamadas matrizes banda.

(3) Simetria de  $K$ . Permutando  $i$  e  $j$  a expressão integral de  $K_{ij}$  não muda o valor calculado, tal que  $K_{ij} = K_{ji}$  e a "matriz de rigidez" para o modelo será simétrica. Esta simetria de  $K$  não tem nada com a escolha da função base e é inteiramente dependente da forma do problema variacional a ser resolvido. Tal simetria será alcançada nos problemas de valor de contorno auto-adjunto.

### III.3 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

#### III.3.1 ALGUNS ASPECTOS HISTÓRICOS

A idéia de representar funções contínuas através de aproximação por partes não é uma novidade. Rudimentos das idéias de interpolação foram supostamente usadas antigamente pelos babilônios e egípcios [23].

Após Newton e Leibniz terem introduzido as idéias do Cálculo, tornou-se possível a formulação da maioria dos problemas da Física Matemática em termos de equações diferenciais e integrais. Evidentemente, com a falha freqüente na tentativa de aplicar os métodos analíticos clássicos na obtenção da solução da maioria destas equações, acrescido do advento dos computadores, conduziram a um número crescente de investigações dos métodos aproximados de análise. O primeiro método aproximado amplamente conhecido foi das diferenças finitas, que aproxima a equação governante do problema usando desenvolvimento local para variável, geralmente através da série de Taylor truncada. Esta técnica pode ser considerada um caso particular de um método mais geral que é o Método dos Resíduos Ponderados.

A primeira investigação rigorosa dos tipos clássicos de equações integrais foi publicado por Fredholm por volta de 1903 [3].

O método desenvolvido por Trefftz em 1917 e Prager em 1928, para resolver equações integrais em Teoria do Potencial e fluxo de fluido, respectivamente, podem ser considerados os precursores das modernas técnicas internas de contorno, mesmo que tais técnicas fossem impraticáveis sem o uso de computadores [3].

O trabalho clássico de Kellog [18] em 1954, sobre Teoria do Potencial, representa aplicação das técnicas de equações integrais.

Entretanto nenhuma solução numérica geral surgiu durante o período anterior ao advento dos computadores digitais. O método das equações integrais como ferramenta computacional prática, eficiente e geral iniciou por volta de 1960, período este que caracterizou o amplo uso de computadores, mostrando uma considerável expansão de desenvolvimento em 1970, com a rápida evolução dos computadores, e alcançando maturidade durante o primeiro semestre de 1980.

A expressão "Método dos Elementos de Contorno" apareceu na literatura em 1977, nos trabalhos de Banerjee e Butterfield, e Brebbia e Domingues, para indicar o caráter de discretização do contorno do problema [3].

Foi mostrado por Brebbia que o Método dos Elementos de Contorno, o Método dos Elementos Finitos e muitos outros métodos numéricos, podem ser obtidos como um caso especial da formulação "Resíduos Ponderados" geral, e a partir daí, estabelecer uma conexão entre as várias técnicas existentes.

Existem basicamente dois tipos de Métodos do Elementos de Contorno, o direto e o indireto. Quando as representações integrais contêm distribuições auxiliares, a formulação é denominada indireta. Se as distribuições são relacionadas com as variáveis do problema, a formulação é chamada direta. A formulação indireta apareceu antes da direta e foi empregada na solução do problema de potencial [18]. A formulação direta foi apresentada pela primeira vez por Cruse e Rizzo em problemas da elasto-estática [3].

Os engenheiros e físicos estão atualmente familiarizados com métodos tais como Diferenças Finitas ou Elementos Finitos. Estas técnicas discretizam o domínio do problema em elementos ou células. As equações do problema são então aproximadas sobre as regiões pelas funções que satisfazem completa ou parcialmente as condições de contorno. Estes métodos juntos com outras técnicas são aplicados sobre o domínio e chamamos método de domínio. Outra possibilidade é usar funções de aproximação que satisfazem às equações governantes do domínio mas não as condições de contorno e são chamadas método de contorno.

Nas representações que se fundamentam o Método dos Elementos de Contorno requer o conhecimento prévio da solução fundamental do operador diferencial do problema, e isto restringe a sua aplicação.

A medida que as aplicações se tornam mais complexas fica mais difícil o conhecimento de uma solução fundamental apropriada. Nestes casos, as formulações usam soluções fundamentais de parte do operador que são conhecidas. Essas técnicas levam ao aparecimento, na formulação, de integral de domínio que envolve incógnitas. O esquema torna-se iterativo e o domínio necessita ser discretizado. Essa metodologia é usada para resolver vários problemas não-lineares [31].

Elementos de Contorno representam uma fronteira entre o elemento finito e domínio infinito. Um dos aspectos mais interessantes do método é o sistema de equações bem menor e considerável redução nos dados requeridos para solucionar o problema. O Método dos Elementos de Contorno geralmente requer somente a discretização do contorno do domínio, e não a discretização do domínio e do contorno como é o caso do Método dos Elementos Finitos, este fato faz com que o Método dos Elementos do Contorno seja mais eficiente que o Método dos Elementos Finitos.[3].

Geralmente, as matrizes que resultam do processo de transformação são não-simétricas e cheias. Essas características conflitam com as das matrizes do Método dos Elementos Finitos que são simétricas e esparsas. Uma das consequências disso é a combinação desses métodos [37].

A construção do sistema de equações no Método dos Elementos de Contorno envolve o cálculo de integrais singulares e não-singulares. A integração analítica somente é possível para os elementos de solução fundamental simples. Em geral as integrais são calculadas numericamente.

### III.3.2 DESCRIÇÃO DO METODO

Consideremos a equação de Laplace no domínio  $\Omega$ , i.e.,

$$\nabla^2 u = 0 \text{ em } \Omega, \quad (\text{III.11})$$

com as seguintes condições de contorno sobre a fronteira  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ :

(i) condição "essencial" do tipo  $u = \bar{u}$  sobre  $\Gamma_1$ ;

(ii) condição "natural" tal como  $q = \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q}$  sobre  $\Gamma_2$ ,

onde  $n$  é a normal exterior ao contorno  $\Gamma$ .

Se as soluções exatas de  $u$  e  $q$  forem substituídas pelas soluções aproximadas, introduziremos erros ou resíduos  $R$  que podem ser escritos em geral por

$$\begin{aligned} R &= \nabla^2 u \neq 0 \\ R_1 &= u - \bar{u} \neq 0 \\ R_2 &= q - \bar{q} \neq 0. \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

Os erros acima podem ser minimizados pela ortogonalização com respeito ao peso  $u^*$ , com derivada sobre o

contorno  $\frac{\partial u^*}{\partial n} = q^*$ . A ponderação pode ser efetuada por

$$\int_{\Omega} R u^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} R_2 u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} R_1 q^* d\Gamma \quad (\text{III.13})$$

ou

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) u^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) q^* d\Gamma \quad (\text{III.14})$$

Integrando por partes o primeiro membro desta equação obtemos

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial u^*}{\partial x_k} d\Omega &= - \int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} u q^* d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

Integrando novamente, por partes o primeiro membro obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla^2 u^*) u d\Omega &= - \int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u q^* d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

Esta é uma equação importante, pois é o ponto de partida p aplicação do Método dos Elementos de Contorno. Nota-se que a (III.16) é terceira identidade de Green [11]. Nosso objetivo é transformá-la em equação integral de contorno e isto é feito usando-se um tipo especial função ponderação  $u^*$  chamada solução fundamental.

A solução fundamental  $u^*$  satisfaz a equação de Laplace e representa o campo gerado por um pulso unitário concentrado no ponto "i". O efeito desta carga é propagar de i ao infinito sem qualquer consideração das condições de contorno.



Para um meio tri-dimensional isotrópico, i.e., aquele para o qual as propriedades são as mesmas em todas as direções, a solução fundamental da equação de Laplace é

$$u^* = \frac{1}{4\pi r} \quad \text{(III.17)}$$

É fácil verificar que a solução (III.17) satisfaz a equação de Laplace tri-dimensional. Por simples substituição da solução pode-se verificar que a equação é satisfeita para qualquer valor de  $r$  diferente de zero. Para o caso  $r \equiv 0$  necessitamos efetuar a integração numa esfera de raio  $\varepsilon$  e então calcular o limite quando  $\varepsilon$  tender a zero.

Considere uma esfera de domínio  $\Omega_\varepsilon$ , e integrando por partes, expresse o laplaciano em termos de fluxo no contorno

$\frac{\partial u^*}{\partial n}$ , i.e.

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u^* d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u^*}{\partial r} d\Gamma \quad \text{(III.18)}$$

note que  $n \equiv r$  sobre a superfície da esfera.

Substituindo a solução fundamental (III.17) em (III.18) e fazendo  $r$  (ou  $\varepsilon$ ) tender a zero obtém-se

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u^*}{\partial r} d\Gamma \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\Gamma_\varepsilon} - \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} d\Gamma \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{4\pi\varepsilon^2}{4\pi\varepsilon^2} = -1 \quad \text{(III.19)}$$

Note que na superfície da esfera  $\Gamma_\varepsilon = 4\pi\varepsilon^2$ .

Por isto a solução fundamental pode ser escrita

$$\nabla^2 u^* + \Delta^i = 0 \quad (\text{III.20})$$

onde  $\Delta^i$  representa uma função delta de Dirac, que tende ao infinito no ponto  $x=x^i$  e é igual a zero nos outros pontos. A integral de  $\Delta^i$  entretanto é igual a um. O uso da função delta de Dirac é uma maneira elegante de representar o pulso concentrado como força, em se tratando de equação integral.

A integral da função delta de Dirac multiplicada por qualquer outra função é igual ao valor da última no ponto  $x^i$ . Então

$$\int_{\Omega} u(\nabla^2 u^*) d\Omega = \int_{\Omega} u(-\Delta^i) d\Omega = -u^i \quad (\text{III.21})$$

A equação (90) pode ser escrita como

$$u^i + \int_{\Gamma_2} u q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} q u^* d\Gamma \quad (\text{III.22})$$

Precisamos lembrar que na equação (III.22) aplica-se o pulso concentrado em "i" e conseqüentemente os valores de  $u^*$  e  $q^*$  são aqueles correspondentes àquela posição particular da carga. Para cada posição  $x^i$  encontraremos uma nova integral.

### III.3.3.EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO

Deduzimos a equação (III.22) que é válida em qualquer ponto do domínio  $\Omega$ . Em elementos de contorno é preferível por razões computacionais aplicar a equação (III.22) sobre o contorno e então verificar o que acontece quando o ponto  $x_i$  está sobre  $\Gamma$ . Uma

maneira simples de fazer isto é considerar que o ponto "i" está sobre o contorno, mas o domínio em si é aumentado por um hemisfério de raio  $\varepsilon$  ao redor do ponto "i" (em 3D). A Fig.III.3.3.1 mostra a seção plana ortogonal à superfície  $\Gamma$  pelo ponto i. O ponto  $x^i$  é considerado sobre o prolongamento do contorno e tendemos  $\varepsilon$  a zero. Então o ponto tornará um ponto de contorno e a expressão resultante é a particularização da (III.22) para ponto sobre  $\Gamma$ .

É importante considerar dois tipos de integral de contorno em (III.22), uma com solução fundamental e outra com sua derivada pois se comportam de maneira diferente.

Consideremos por simplicidade a equação (III.22) antes de qualquer condição de contorno ter sido aplicada, i.e.

$$u^i + \int_{\Gamma} u \, q^* \, d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* \, q \, d\Gamma \quad (III.23)$$

onde  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ . A verificação das condições de contorno será deixada para mais tarde.

As integrais do segundo membro da (III.23) são fáceis de trabalhar, pois apresentam singularidades de baixa ordem, i.e. para casos tridimensionais a integral de contorno  $\Gamma_{\varepsilon}$  será

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} q \, u^* \, d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} q \, \frac{1}{4\pi\varepsilon} \, d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} q \, \frac{2\pi\varepsilon^2}{4\pi\varepsilon} = 0 \quad (III.24)$$

Em outras palavras nada ocorre ao segundo membro da integral quando (III.22) ou (III.23) são tomadas sobre o contorno.

A integral do lado esquerdo entretanto comporta-se de uma maneira diferente. Aqui temos, em torno de  $\Gamma_{\varepsilon}$ , o seguinte resultado

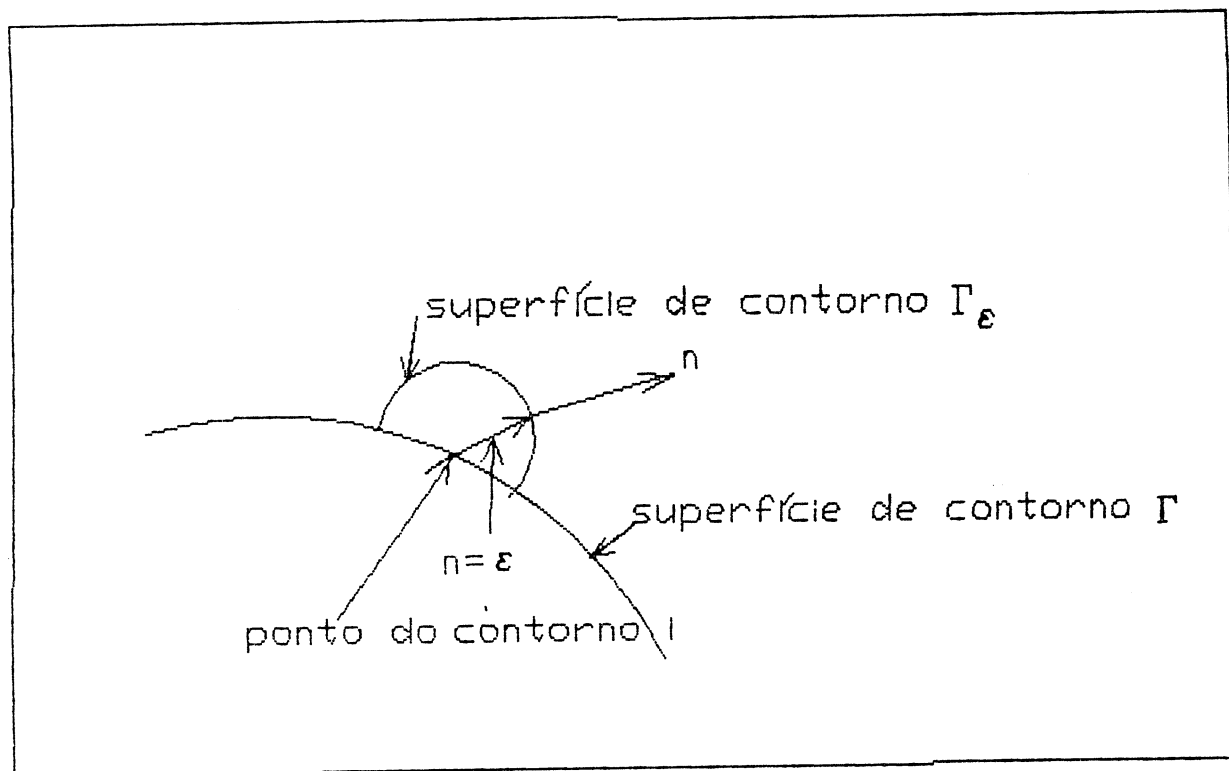


Fig. III.3.3 Ponto do contorno, aumentado de um pequeno hemisfério.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u \, q^* \, d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} - \int_{\Gamma_\varepsilon} u \, \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \, d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -u \, \frac{2\pi\varepsilon^2}{4\pi\varepsilon^2} = - \frac{1}{2} u^i \quad (\text{III.25})$$

Elas produzem o que é chamado termo livre.

De (III.24) e (III.25) em (III.23) podemos escrever

$$\frac{1}{2} u^i + \int_{\Gamma} u \, q^* \, d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* \, q \, d\Gamma \quad (\text{III.26})$$

onde as integrais são no sentido do valor principal de Cauchy. Esta é a equação integral de contorno geral usada como ponto de partida para elemento de contorno.

Em (III.26) após substituir o coeficiente  $1/2$  por  $c^i$ , porque usa-se  $c^i=1/2$  somente para contorno liso, discretizamos o contorno em  $N$  elementos e a equação (III.26) pode ser escrita

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u \, q^* \, d\Gamma = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u^* \, q \, d\Gamma \quad (\text{III.27})$$

Os valores de  $u$  e  $q$  em qualquer ponto sobre o elemento podem ser definidos em termos de seus valores nodais e as funções de interpolação  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , caso linear, que são dadas em termos das coordenadas homogêneas  $\xi$  como mostra a Fig.III.3.3.1, i.e.

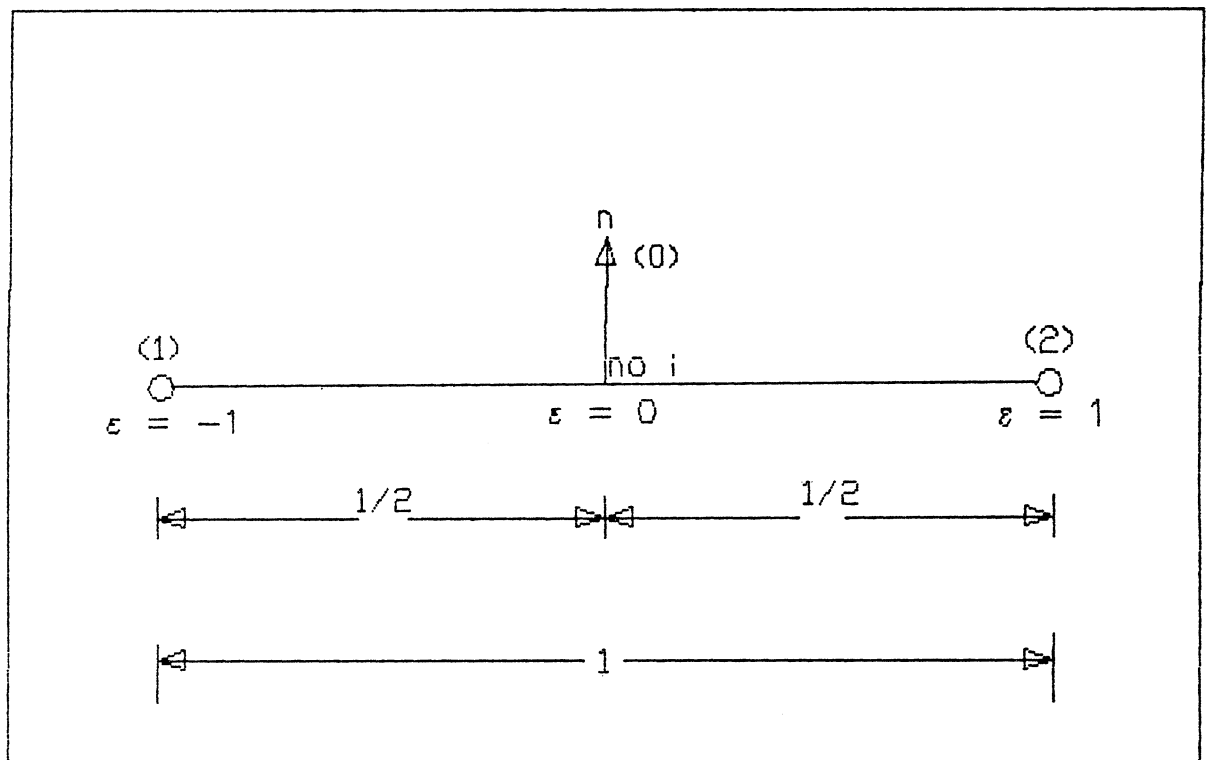


Fig. III.3.3.1 Sistema de coordenadas elementares.

$$\begin{aligned}
 u(\xi) &= \sum_{l=1}^M \phi_l u^l \\
 q(\xi) &= \sum_{l=1}^M \phi_l q^l
 \end{aligned}
 \tag{III.28}$$

$\xi$  é a coordenada adimensional variando de -1 a +1 e as M funções  $\phi_l$  são chamadas funções de interpolação.

Consideremos as integrais sobre um elemento "j". A integral do lado esquerdo pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_j} u q^* d\Gamma &= \int_{\Gamma_j} \sum_{l=1}^M \phi_l u^l q^* d\Gamma \\
 &= \sum_{l=1}^M \int \phi_l q^* d\Gamma u^l = \sum_{l=1}^M k_l^{ij} u^l
 \end{aligned}
 \tag{III.29}$$

onde para cada elemento "j" temos M termos

$$k_l^{ij} = \int_{\Gamma_j} \phi_l q^* d\Gamma
 \tag{III.30}$$

Similarmente as integrais do lado direito dão:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_j} q u^* d\Gamma &= \int_{\Gamma_j} \sum_{l=1}^M \phi_l q^l u^* d\Gamma \\
 &= \sum_{l=1}^M \int \phi_l u^* d\Gamma q^l = \sum_{l=1}^M s_l^{ij} q^l
 \end{aligned}
 \tag{III.31}$$

onde

$$e_l^{ij} = \int_{\Gamma_j} \phi_l u^* d\Gamma \quad (III.32)$$

Quando o contorno do domínio é discretizado em elementos, existem nós comuns aos elementos adjacentes. Como o potencial é único, a qualquer ponto do contorno, para o caso particular do geóide, o valor de  $u$  destes elementos é o mesmo.

Substituindo as equações (III.28) e (III.29) para todo elemento "j" na (III.30), obtém-se a seguinte equação para o nó "i"

$$c^i u^i + [\hat{K}^{i2} \hat{K}^{i2} \dots \hat{K}^{iN}] \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^N \end{bmatrix} = [G^{i1} \ G^{i2} \dots \ G^{iN}] \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ \vdots \\ q^N \end{bmatrix} \quad (III.33)$$

onde  $\hat{K}^{ij}$  é igual a soma dos termos  $k_l^{ij}$  dos elementos que concorrem no nó j. Então a fórmula (III.33) representa a equação montada para o nó "i". Note a simplicidade desta aproximação. A equação (III.33) pode ser escrita como

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^N \hat{K}^{ij} u^j = \sum_{j=1}^N G^{ij} q^j \quad (III.34)$$

Esta fórmula pode ser escrita como

$$\sum_{j=1}^N K^{ij} u^j = \sum_{j=1}^N G^{ij} q^j \quad (III.35)$$

onde

$$K^{ij} = \begin{cases} \hat{K}^{ij} & \text{quando } i \neq j \\ \hat{K}^{ij} + c^i & \text{quando } i = j \end{cases} \quad (III.36)$$



e o conjunto todo na forma matricial se torna

$$K U = G Q \quad (III.37)$$

onde K e G são matrizes retangulares NxN.

A equação (III.36) pode ser armazenada de tal maneira que todas as incógnitas são tomadas no lado esquerdo, os termos conhecidos no lado direito, e obtém-se o sistema usual de NxN equações, i. e.

$$A X = F \quad (III.38)$$

onde X é um vetor de N incógnitas; A é matriz NxN dos coeficientes cujas colunas são da matriz K e/ou colunas da matriz G após uma troca de sinal ; F é um vetor conhecido calculado pelo produto de condições de contorno conhecidas e os coeficientes correspondentes de G e K.

As condições de contorno da Geodésia são do tipo de Cauchy, que prescreve uma relação linear entre o potencial e sua derivada normal a pontos sobre o contorno  $\Gamma$  como segue

$$e u + f q = d \quad (III.39)$$

onde d, e e f são funções de posição.

Se a equação (III.39) for aplicada a todos os nós do contorno, podemos escrever

$$Q = D - E U \quad (III.40)$$

onde o vetor D e a matriz diagonal E contêm os valores da d/f e e/f, respectivamente, a cada nó do contorno.

Substituindo a equação (III.40) em (III.37) obtemos o sistema de equações

$$(K + G E) U = G D \quad \text{(III.41)}$$

ou mais simplesmente

$$A Y = F \quad \text{(III.42)}$$

Após resolver o sistema de equações (III.42) as derivadas normais do potencial ao longo do contorno podem ser avaliadas ponto a ponto usando a condição (III.40).

### III.3.4 ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PROBLEMAS TRI-DIMENSIONAIS

Os elementos usados em problemas tri-dimensionais são elementos de superfície que cobrem o contorno do corpo. Geralmente são de dois tipos, triangulares ou quadrangulares e ambos podem ser planos ou curvos. As funções  $u$  e  $q$  que são usadas para descrever a geometria podem ser constantes sobre o elemento, variar linearmente, ser funções de segunda ordem ou outras que produzem um elemento curvo. Enquanto que o desenvolvimento de elementos constantes ou lineares são comparativamente simples, elementos curvos são mais importantes em três dimensões pois podem seguir melhor a geometria real.

Para estudar elementos curvos, necessitamos definir a maneira que podemos passar do sistema cartesiano global  $x_1 x_2 x_3$  ao sistema local  $\xi_1 \xi_2 \eta$ , onde  $\xi_1 \xi_2$  são coordenadas oblíquas e  $\eta$  é a direção da normal exterior.

A transformação para uma função dada, isto é  $u$ , é relacionada através da seguinte expressão

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} & \frac{\partial x_3}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad \text{(III.43)}$$

onde a matriz quadrada é o jacobiano ou J. Então

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (\text{III.44})$$

A relação inversa é dada por

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (\text{III.45})$$

Transformações deste tipo nos permitem descrever diferenciais de volume ou de superfícies do sistema cartesiano em termos de coordenadas curvilíneas. Por exemplo, uma diferencial de volume  $\Omega$  pode ser escrita como

$$d\Omega = \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta} \end{array} \right| d\xi_1 d\xi_2 d\eta$$

$$d\Omega = |J| d\xi_1 d\xi_2 d\eta \quad (\text{III.46})$$

Uma diferencial de área será dada por

$$d\Gamma = \left| \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \xi_2} \right| d\xi_1 d\xi_2 = |J| d\xi_1 d\xi_2 \quad (\text{III.47})$$

onde J é o jacobiano reduzido e  $|J|$  é simplesmente a magnitude do vetor normal  $\bar{\eta}$  ; i.e.

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \xi_2} = (\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3) = \\ &= \left( \frac{\partial x_1}{\partial \eta}, \frac{\partial x_2}{\partial \eta}, \frac{\partial x_3}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.48})$$

onde

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \xi_1} = \left( \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}, \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}, \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \right) ;$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \xi_2} = \left( \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}, \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}, \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \right)$$

Note-se que os valores de  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  e  $\xi_3$  são dados por

$$\xi_1 = \left( \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2}, \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \right)$$

$$\xi_2 = \left( \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}, \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \right) \quad (\text{III.49})$$

$$\varepsilon_3 = \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \end{array} \right)$$

Então a magnitude  $|J|$  é dada por

$$|J| = \sqrt{(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2)} \quad \text{(III.50)}$$

Estas relações podem ser usadas para quaisquer integrais de contorno, tais como

$$\int_{\Gamma} u^* q \, d\Gamma \quad \text{ou} \quad \int_{\Gamma} u \, q^* \, d\Gamma \quad \text{(III.51)}$$

que agora se torna

$$\int_{\Gamma_{\xi}} u^* q \, |J| \, d\xi_1 d\xi_2, \quad \int_{\Gamma_{\xi}} u \, q^* \, |J| \, d\xi_1 d\xi_2 \quad \text{(III.52)}$$

## CAPITULO IV

### IV.1. APLICAÇÃO DO METODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO NA GEODESIA

Um dos problemas da Geodésia é calcular o potencial perturbador  $T$ , que satisfaça a equação de Laplace no exterior das massas, isto é,

$$\nabla^2 T = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad (\text{IV.1})$$

com as condições de contorno

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2T}{R} + \Delta g &= 0 \quad \text{sobre a esfera de raio } R, \Gamma_1 \\ T &= 0 \quad \text{sobre a esfera de raio } \infty, \Gamma_2 \end{aligned} \quad (\text{IV.2})$$

O domínio  $\Omega$  do nosso problema é o exterior à esfera de raio  $R$  e o contorno  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ , onde  $\Gamma_1$  é a esfera de raio  $R$  e  $\Gamma_2$  é a esfera de raio infinito.

Se considerarmos uma aproximação de  $T$ , introduzimos erros nas equações (IV.1) e (IV.2), que representamos por

$$\begin{aligned} R_0 &= \nabla^2 T \\ R_1 &= T \\ R_2 &= \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2T}{R} + \Delta g \end{aligned}$$

considerando a mesma ponderação aplicada na (III.13), podemos escrever

$$\int_{\Omega} \nabla^2 T \, u^* \, d\Omega = \int_{\Gamma_1} \left[ \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2T}{R} + \Delta g \right] u^* \, d\Gamma$$

$$- \int_{\Gamma_2} T q^* d\Gamma \quad (IV.3)$$

A solução fundamental para este problema é

$$u^* = \frac{1}{4\pi r} \quad (IV.4)$$

e sua derivada

$$q^* = - \frac{1}{4\pi r^2} \quad (IV.5)$$

Como no nosso problema  $u^*$  e  $q^*$  são iguais a zero sobre  $\Gamma_2$ , podemos considerar as integrais somente sobre  $\Gamma_1$  em (IV.3), ou seja

$$\int_{\Omega} \nabla^2 T u^* d\Omega = \int_{\Gamma_1} \left[ \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2T}{R} + \Delta g \right] u^* d\Gamma \quad (IV.6)$$

Integrando por partes o primeiro membro obtemos

$$- \int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial T}{\partial x_k} \frac{\partial u^*}{\partial x_k} d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial T}{\partial r} u^* d\Gamma = \int_{\Gamma_1} \left[ \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2T}{R} + \Delta g \right] u^* d\Gamma \quad (IV.7)$$

Observando que a segunda integral do primeiro membro se desenvolve sobre o contorno todo, que coincide com  $\Gamma_1$ , podemos escrever



$$-\int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial T}{\partial x_k} \frac{\partial u^*}{\partial x_k} d\Omega = \int_{\Gamma_1} \left[ \frac{2T}{R} + \Delta g \right] u^* d\Gamma \quad (IV.8)$$

Integrando, novamente por partes, o primeiro membro, obtém-se

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u^* T d\Omega - \int_{\Gamma} T q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_1} \left[ \frac{2T}{R} + \Delta g \right] u^* d\Gamma \quad (IV.9)$$

Após a simplificação chegamos a

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u^* T d\Omega = \int_{\Gamma_1} T q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \left[ \frac{2T}{R} + \Delta g \right] u^* d\Gamma$$

ou

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u^* T d\Omega = \int_{\Gamma_1} T \left[ q^* + \frac{2u^*}{R} \right] d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \Delta g u^* d\Gamma \quad (IV.10)$$

Considerando o potencial constante, as anomalias da gravidade constantes em cada elemento, as conclusões de (III.21) e (III.25), podemos escrever

$$\frac{1}{2} T_i + \sum_{j=1}^n T_j \int_{\Gamma_j} \left( \frac{2}{R} u^* + q^* \right) d\Gamma = - \sum_{j=1}^n \Delta g_j \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \quad (IV.11)$$

#### IV.2.AVALIAÇÃO DAS INTEGRAIS

As integrais da fórmula acima são de dois tipos

$$H_{ij} = \int_{\Gamma} u^* d\Gamma \quad \text{e} \quad G_{ij} = \int_{\Gamma} q^* d\Gamma.$$

Tais expressões, para o caso  $i \neq j$ , podem se calculadas pelas fórmulas de integração numérica como a quadratura gaussiana. Para o elemento  $i=j$  entretanto devido à singularidade  $1/r$ , é necessário uma integração mais precisa, tal como a apresentada no Apêndice I.

Para o caso particular de elemento constante os termos  $H^{ii}$  são identicamente nulos, pois a normal  $n$  e o elemento são sempre perpendiculares um ao outro, i.e.,

$$H^{ii} = \int_{\Gamma_i} q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_i} \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma \equiv 0.$$

A integral  $G^{ii}$  requer um tratamento especial, pois apresenta singularidade do tipo  $1/r$ .

Neste trabalho a malha é definida por "quadrados esféricos", ou simplesmente "quadrados", definidos por paralelos e meridianos. Por exemplo, no caso de  $10^0$  por  $10^0$ , com isto  $n$  será igual a 648.

A partir de (IV.11), montamos um sistema de  $n$  equações a  $n$  incógnitas, do tipo  $A Y=F$  onde

$$A_{ij} = \begin{cases} \int_{\Gamma_j} (q^* + \frac{2}{R} u^*) d\Gamma & \text{para } i \neq j \\ \int_{\Gamma_j} (q^* + \frac{2}{R} u^*) d\Gamma + \frac{1}{2} & \text{para } i=j \end{cases} \quad \text{(IV.12)}$$

e

$$F_i = \sum_{j=1}^n - \Delta g_j \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \quad (IV.13)$$

Resolvido o sistema de equações, dividimos os valores de T, pela gravidade média G para obter N, a ondulação geoidal desejada.

O nosso problema é calcular a (IV.12) e a (IV.13) onde  $\Gamma$  é o quadrado esférico de  $5^0 \times 5^0$ ,  $10^0 \times 10^0$  e de  $20^0 \times 20^0$ .

Para isto, determinemos o elemento  $\Gamma_j$ , sobre a esfera de raio R. Como

$$d\Gamma_j = \sqrt{1 + \left[ \frac{\partial z}{\partial x} \right]^2 + \left[ \frac{\partial z}{\partial y} \right]^2} dx dy ,$$

e da equação da esfera temos que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{x}{z} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{y}{z} ,$$

então podemos escrever

$$d\Gamma_j = \frac{R}{z} dx dy = J dx dy. \quad (IV.14)$$

Inicialmente transformamos as coordenadas cartesianas x,y para coordenadas esféricas R,  $\phi$  e  $\lambda$ , considerando R constante por

$$\begin{aligned}x &= R \cos\phi \cos\lambda \\y &= R \cos\phi \sin\lambda.\end{aligned}\tag{IV.15}$$

Onde as diferenciais estão relacionadas por

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R \sin\phi \cos\lambda & -R \cos\phi \sin\lambda \\ R \sin\phi \sin\lambda & R \cos\phi \cos\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\phi \\ d\lambda \end{bmatrix}\tag{IV.16}$$

ou

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = |J_1| \begin{bmatrix} d\phi \\ d\lambda \end{bmatrix} \quad \text{com } J_1 = R \sin^2\phi \cos\phi.\tag{IV.17}$$

Então

$$dx \, dy = |J_1| \, d\phi \, d\lambda.\tag{IV.18}$$

E a integral devidamente transformada, por exemplo a (IV.12), terá a forma

$$I = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left( \frac{2}{R} u^* + q^* \right) J |J_1| d\phi d\lambda\tag{IV.19}$$

onde  $d\Gamma = J |J_1| \, d\phi \, d\lambda$  é o "quadrado" sobre a esfera de raio R.

Podemos transformar esta integral em coordenadas locais  $\xi$  e  $\eta$  normalizado, isto é

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta,\tag{IV.20}$$

pois desta maneira temos da integração numérica (ver apêndice I)

$$I = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_{ij} f(\xi_i, \eta_j).\tag{IV.21}$$

Normalizando o sistema  $\phi\lambda$ , obtemos

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{2\phi - (\phi_1 + \phi_2)}{\phi_2 - \phi_1} \\ \eta &= \frac{2\lambda - (\lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1}\end{aligned}\tag{IV.22}$$

e as relações entre as diferenciais dadas por

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\phi_2 - \phi_1} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\phi \\ d\lambda \end{bmatrix}\tag{IV.23}$$

ou

$$d\phi \, d\lambda = |J_2|^{-1} d\xi \, d\eta, \text{ com } J_2 = \frac{4}{(\phi_2 - \phi_1)(\lambda_2 - \lambda_1)}.\tag{IV.24}$$

Então

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \frac{2}{R} r^* + q^* \right) J |J_1| |J_2|^{-1} d\xi \, d\eta,\tag{IV.25}$$

lembrando que  $r^*$  e  $q^*$  são funções de  $\xi$  e  $\eta$ .

#### IV.3 GEÓIDE CALCULADO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Calculamos o potencial anômalo  $T$  sobre a superfície da Terra, utilizando as anomalias da gravidade da Força Aérea Americana [36] e o Método dos Elementos de Contorno.

A superfície de contorno utilizada foi a esfera de raio 6.371 km, com centro no centro de gravidade da Terra.

Em cada um dos quadrados esféricos consideramos o potencial constante e as anomalias da gravidade constantes e iguais a média. Para calcular a média em cada "quadrado" e gravar os resultados juntamente com suas coordenadas centrais usamos o programa ANOMED.PAS, apresentado no apêndice V.

Para calcular as integrais de superfície, utilizamos o métodos da quadratura de Gauss, descrito no Apêndice I, com três pontos de integração em cada direção, da latitude e da longitude, isto nos elementos que não apresentam singularidades. Nos elementos que apresentam singularidade, isto é, quando  $i=j$ , usamos quatro elementos triangulares apresentado no mesmo apêndice com uma rotação de quarenta e cinco graus, com um ponto de integração.

Desta forma montamos o sistema de  $n$  equações com  $n$  incógnitas, utilizando o programa INTEGRAL.PAS, e o sistema de equações foi calculado pelo método de Gauss-Seidel, usando o programa GAUSEIDL.PAS.

Consideramos três malhas, uma de vinte graus por vinte graus, outra de dez graus por dez graus, e outra de cinco graus por cinco graus que referiremos por malha de vinte, malha de dez e malha de cinco, respectivamente.

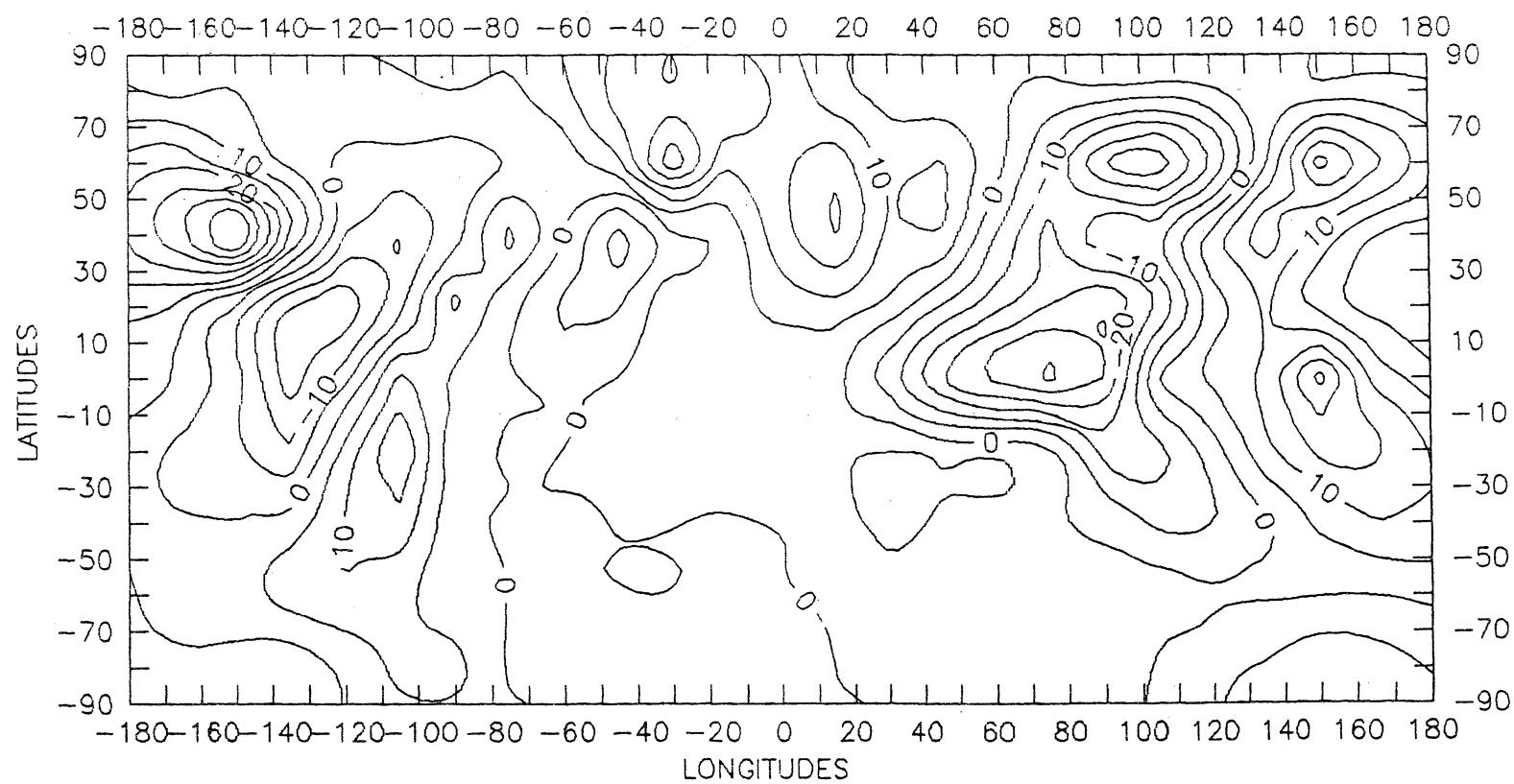
Os resultados para malhas de vinte graus por vinte graus, dez graus por dez graus e cinco graus por cinco graus apresentamos nas páginas seguintes juntamente com as cartas geoidais respectivas. A longitude impressa é o limite superior , e não a longitude do ponto médio do elemento, como acontece no caso da latitude. Para se calcular a longitude do elemento da malha de vinte devemos subtrair  $10.5^{\circ}$ , da malha de dez subtraímos  $5.5^{\circ}$ , e da malha de cinco subtraímos  $3^{\circ}$  da longitude impressa.

ONDULACAO GEOIDAL CALCULADO PELO METODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO  
ELEMENTOS DE 20 GRAUS POR 20 GRAUS

LAT\LON	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360
80.5	7	2	1	0	0	0	3	0	0	20	14	16	3	5	3	4	5	2
60.5	22	7	11	-5	-25	-31	-6	27	15	5	29	4	0	-2	0	0	9	19
40.5	25	8	10	-18	-4	-3	20	9	-2	1	-2	-16	16	-2	-12	9	47	26
20.5	8	4	-7	-15	-26	-11	11	2	-4	3	5	-7	-4	13	-13	-22	-2	7
0.5	1	-7	-26	-35	-25	9	4	27	2	1	1	0	0	3	11	-21	-3	6
-19.5	4	5	4	8	-12	-11	6	16	15	5	1	0	0	0	25	-9	-4	0
-39.5	1	7	3	1	-1	-7	-3	6	10	0	0	0	0	0	16	3	0	0
-59.5	0	2	1	2	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	7	10	2	0
-79.5	0	0	1	4	5	-3	-4	-8	-6	-5	-1	0	-3	7	6	-4	-1	0



Fig.IV.3.1 CARTA GEOIDAL 20X20

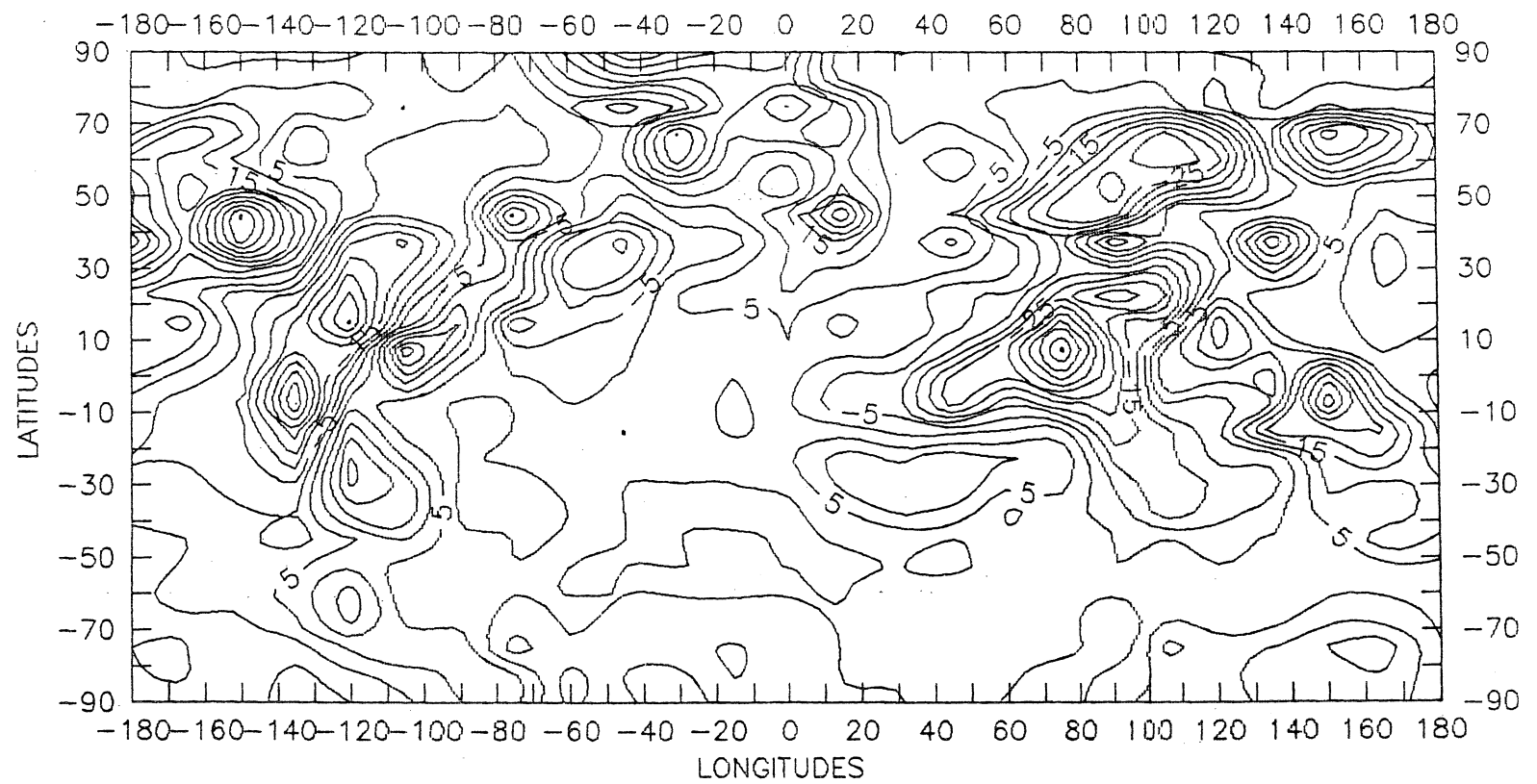


ONDULACAO GEODAL CALCULADO PELO METODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO  
ELEMENTOS DE 5 GRAUS POR 5 GRAUS

AT\ON	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
87.5	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
82.5	6	1	-1	-1	10	0	0	0	0	0	0	8	0	0	0	0	0	0
77.5	0	0	3	-3	0	0	1	0	1	0	0	0	-1	-1	-3	0	0	0
72.5	0	13	49	41	10	5	7	3	0	0	3	2	-4	-3	0	0	2	0
67.5	39	33	37	26	7	-1	10	0	6	-1	1	0	0	0	0	-13	-12	13
62.5	20	48	28	5	-10	1	14	11	9	24	6	1	0	-1	-2	-4	-22	-18
57.5	10	29	17	-5	-7	7	9	17	11	18	17	33	17	-11	-27	-22	-12	-9
52.5	-6	21	31	12	11	15	16	7	18	0	9	14	2	5	4	-28	-22	-4
47.5	13	35	40	49	38	30	29	7	6	-11	-24	-13	-5	-20	-22	-44	-56	-43
42.5	30	30	27	47	25	4	-25	-40	31	-6	-1	-4	-20	-58	-46	-5	-32	-53
37.5	32	41	41	4	7	31	-2	12	8	61	6	8	-61	-50	32	-22	3	3
32.5	30	-31	10	4	9	-39	-6	49	3	0	61	45	25	44	-112	66	54	52
27.5	-25	14	3	6	7	2	7	1	9	-4	-30	-12	46	-4	-8	-65	-129	-16
22.5	40	61	4	13	-1	0	3	12	7	-26	-44	-3	0	-2	5	3	-4	-8
17.5	15	10	-6	-10	-2	0	1	10	13	-25	-7	2	-6	-4	-38	-40	9	-22
12.5	-1	8	7	0	-1	2	0	25	5	0	-5	-4	-12	-28	-45	-48	-7	0
7.5	20	19	15	1	-4	0	0	34	5	0	-66	-6	-23	-56	-75	-53	-50	-30
2.5	0	10	7	-12	-40	-4	0	0	-6	-43	-44	-32	-36	-27	-68	-48	-56	-19
-2.5	0	5	-6	-36	-80	1	-15	18	-52	-25	-21	-31	-33	-22	-54	-38	-92	-48
-7.5	0	-3	7	-2	-18	-17	5	6	-57	-26	-7	-3	-6	-5	-12	0	-22	-3
-12.5	0	0	2	1	0	-12	-8	-12	-33	10	-9	-10	-6	0	1	0	-15	0
-17.5	0	2	2	1	0	0	10	0	-17	30	0	7	14	0	0	6	-25	-14
-22.5	3	0	0	12	1	15	-10	-8	2	32	4	12	33	31	22	-1	-2	-9
-27.5	0	1	-2	45	26	71	29	-13	11	22	3	-1	1	16	24	0	-5	0
-32.5	1	2	2	17	51	30	17	-3	17	24	0	0	-3	0	13	0	0	0
-37.5	0	-2	0	0	5	6	11	5	10	0	0	0	0	0	0	-1	-5	2
-42.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0
-47.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	8	0	0
-52.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	3	0	0
-57.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-62.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-67.5	0	0	0	0	0	0	10	23	4	0	7	13	11	0	6	8	2	8
-72.5	0	0	0	0	11	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8
-77.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	20	10
-82.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	9	9	11	14	31	0	0
-87.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

LAT\LONG	95	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150	155	160	165	170	175	180
87.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
82.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
77.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-13	0	0	0	0	0	0	-4	4
72.5	-4	7	0	-6	-3	20	29	46	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
67.5	-22	8	-30	-20	-30	-33	-30	18	8	33	40	35	46	38	51	51	38	34
62.5	-47	-70	-64	-41	-27	-45	-30	-32	-12	18	51	68	50	43	38	0	0	0
57.5	-54	-46	-26	-15	-52	-60	-61	-33	-16	22	0	0	0	31	8	0	0	0
52.5	-23	-57	-55	-1	-5	4	0	9	0	0	0	0	0	37	5	0	20	7
47.5	-21	-36	-13	0	0	5	15	14	9	2	5	0	0	0	0	0	0	0
42.5	-42	0	12	0	0	3	13	32	6	0	71	7	0	0	0	0	0	0
37.5	19	37	16	0	-14	-9	10	37	8	67	55	3	0	0	-7	-4	1	-3
32.5	22	23	-12	-8	-36	-3	1	23	27	63	15	0	-2	-5	-9	-9	-11	0
27.5	-52	-36	-30	-28	-18	0	0	23	-5	11	4	3	0	-1	-2	-5	-8	-5
22.5	-58	-30	-45	-15	-9	0	1	-2	0	0	1	0	7	-8	-8	-2	-1	-10
17.5	-20	-22	-30	-11	0	6	46	3	1	6	19	10	4	-10	-5	-1	-16	-2
12.5	-19	-8	-18	0	0	15	71	25	0	2	26	-15	-4	-3	-4	-3	0	14
7.5	-41	11	5	3	4	14	57	14	18	11	5	6	1	0	0	0	17	4
2.5	-23	-22	13	20	10	0	26	9	14	0	10	11	0	1	0	0	0	2
-2.5	-20	3	-1	40	8	3	-8	10	26	0	42	76	23	15	0	0	0	-6
-7.5	-6	7	-34	16	20	19	-16	-37	-70	13	73	-1	37	124	26	0	-7	0
-12.5	-21	-8	-10	0	-23	-40	-3	17	50	28	32	7	49	17	57	26	-3	-1
-17.5	-34	-24	-22	-9	-22	0	24	29	5	16	28	26	3	9	0	24	8	27
-22.5	-11	-25	-12	0	-10	3	2	-15	2	14	4	32	15	1	13	49	21	4
-27.5	-4	-7	0	-30	-6	3	-2	-6	-49	-16	-12	12	38	0	5	7	2	0
-32.5	2	-16	-14	-37	-38	-6	-28	-15	-25	7	-7	22	25	0	0	0	13	8
-37.5	-3	-5	-13	-7	0	0	0	0	0	2	9	29	3	-3	0	3	24	25
-42.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	0	0	6	17	12
-47.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	51	9	0
-52.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	6	0	0
-57.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-62.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-67.5	29	17	4	0	35	0	2	0	0	20	1	0	0	0	0	0	0	0
-72.5	18	14	0	-2	-25	0	0	0	0	-3	-7	-8	-9	-8	3	0	-2	0
-77.5	10	1	-24	0	0	0	0	0	0	-14	-30	-36	-26	24	-48	-6	-1	0
-82.5	0	0	0	0	0	0	-1	-22	-20	-10	0	0	0	-8	-5	-19	-9	0
-87.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-4	-5	-8	-13	-13	0	0	0

Fig.VI.3.2 CARTA GEOIDAL 10X10



LAT\	LON	185	190	195	200	205	210	215	220	225	230	235	240	245	250	255	260	265	270
87.5		29	29	30	24	29	31	28	32	35	39	42	34	21	11	0	0	4	16
82.5		28	19	13	12	18	20	40	37	34	28	17	16	4	2	0	0	0	0
77.5		32	10	28	38	28	10	14	-10	-24	-13	12	-1	16	0	0	0	1	5
72.5		1	6	10	20	-14	-24	-11	-4	-18	44	13	-3	0	0	0	0	3	3
67.5		23	7	-1	14	15	35	57	30	8	-4	0	0	0	0	0	-7	-14	-6
62.5		0	4	11	23	33	5	86	71	29	3	0	0	0	0	0	0	0	0
57.5		0	24	18	19	57	23	35	7	13	12	5	5	0	1	0	0	0	0
52.5		-46	-23	8	2	-7	0	11	7	0	-10	10	0	1	1	0	0	0	0
47.5		14	14	16	6	7	3	-1	0	2	-7	-10	-8	0	35	27	28	16	19
42.5		0	-1	-1	-1	4	1	0	0	-9	-6	-12	19	27	48	56	19	6	-9
37.5		0	0	-4	-4	-1	0	2	-25	-19	-35	-47	-25	7	12	47	-4	-13	-12
32.5		-6	0	-6	-2	-1	0	-13	-5	-10	-31	-26	-33	-23	-19	11	-5	-3	-1
27.5		0	2	6	5	0	-4	-2	0	-10	-8	-13	-26	-24	-31	20	26	-21	-12
22.5		-6	6	17	12	61	1	-6	-5	-6	-14	-6	-1	-8	2	-15	43	8	11
17.5		-2	1	-2	0	39	-4	4	-4	-10	-4	-8	-7	-14	-9	-24	-31	31	25
12.5		7	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	-8	0	-1	0	1	5
7.5		0	-8	-2	4	13	0	0	0	0	0	0	0	-6	-5	-2	0	1	2
2.5		4	-5	0	11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-2.5		2	-2	0	12	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-7.5		-4	0	0	18	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-12.5		13	9	14	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-17.5		-1	0	0	0	4	8	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-22.5		18	-7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0
-27.5		24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
-32.5		-12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-3	-6	0
-37.5		-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-4	0
-42.5		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1
-47.5		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-52.5		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-57.5		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-62.5		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-67.5		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-72.5		0	0	0	0	0	-9	-3	0	0	0	0	0	-8	0	0	0	0	13
-77.5		-6	-6	-12	-11	-4	-8	2	-15	-10	-3	15	11	4	-14	-21	-13	-14	28
-82.5		-6	-16	-13	-4	0	0	0	0	0	-3	0	-21	-4	-47	2	36	43	21
-87.5		0	0	0	-3	2	6	14	-1	0	8	-3	-2	10	0	-1	-1	-2	-8

LAT\	LON	275	280	285	290	295	300	305	310	315	320	325	330	335	340	345	350	355	360
87.5	27	20	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
82.5	0	3	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	11	2
77.5	0	0	0	-2	21	33	29	14	1	13	-9	4	2	-4	0	12	6	0	0
72.5	1	0	0	0	0	0	-1	-7	4	11	37	34	6	2	0	0	8	0	0
67.5	0	-3	0	0	-2	3	0	-13	5	0	7	3	0	32	43	9	0	0	0
62.5	0	0	0	0	0	0	0	-3	-19	-3	5	12	22	48	56	12	13	9	9
57.5	-8	-9	-24	0	0	17	0	0	0	9	4	0	0	0	8	4	44	27	27
52.5	-1	0	0	0	0	0	4	8	0	0	0	8	5	1	0	19	38	25	25
47.5	-7	-2	-1	-3	0	0	12	45	31	14	27	56	53	52	24	10	0	17	17
42.5	-17	-14	-19	15	11	-10	-31	4	28	14	35	54	78	56	28	-5	40	21	21
37.5	-1	-5	9	-36	-28	-18	-11	-10	-2	38	44	93	88	43	4	20	37	32	32
32.5	-7	10	-12	-49	-30	-3	-18	-16	2	41	57	21	5	-4	17	6	94	77	77
27.5	0	19	-22	-19	-12	-3	-48	-28	0	12	-1	5	-9	-14	18	14	11	1	1
22.5	37	1	27	-18	-14	-4	-37	-41	-10	3	-2	6	-2	0	3	-6	-16	-3	-3
17.5	34	6	1	56	-16	-44	-24	-2	-13	-5	-11	0	1	11	13	19	1	12	12
12.5	35	21	-16	-38	-58	-29	-86	-36	-22	-23	3	-6	-5	-11	22	13	16	3	3
7.5	22	35	61	26	-3	-10	-12	-26	-46	-24	-12	6	-1	0	6	34	53	28	28
2.5	0	3	41	47	1	0	-6	-3	-1	-10	-7	12	3	0	-5	-4	3	1	1
-2.5	0	0	9	18	10	-1	-4	0	-58	-40	2	-8	-5	-15	-10	4	1	0	0
-7.5	0	-4	-8	-8	2	0	0	0	-56	-56	-3	-18	-3	-5	-7	4	-1	-2	-2
-12.5	0	0	-4	7	13	9	0	-7	8	-15	-8	-7	0	0	-3	-4	-2	-1	-1
-17.5	0	0	-4	4	98	15	10	-1	-42	-45	-18	-9	0	0	0	0	0	0	0
-22.5	0	0	0	0	94	6	1	-27	-18	-2	-10	-11	0	0	0	0	0	0	0
-27.5	0	0	0	28	118	17	13	1	-24	-6	-4	0	0	0	0	0	-1	0	0
-32.5	0	0	-1	37	11	33	38	21	2	4	0	-5	2	2	0	0	-1	6	6
-37.5	0	0	0	54	20	15	32	2	-5	-2	0	0	0	2	1	5	0	0	0
-42.5	-1	0	0	50	53	-3	-16	-2	-7	0	0	0	0	0	0	0	0	-3	-3
-47.5	7	9	-5	-3	0	0	-10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-52.5	0	6	5	0	10	17	-3	0	0	0	19	0	0	0	0	0	0	0	0
-57.5	0	0	0	-3	23	4	15	22	19	2	0	4	16	0	0	0	0	0	0
-62.5	0	0	0	0	0	37	59	25	27	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-67.5	1	0	0	0	22	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-72.5	13	7	8	24	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-77.5	23	0	-3	9	10	0	0	0	2	-8	-10	0	2	0	0	0	0	0	0
-82.5	9	-7	-2	0	11	0	-25	-7	-11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-87.5	-12	0	1	4	4	3	3	-6	-9	-10	-7	-4	-3	-1	0	0	0	0	0

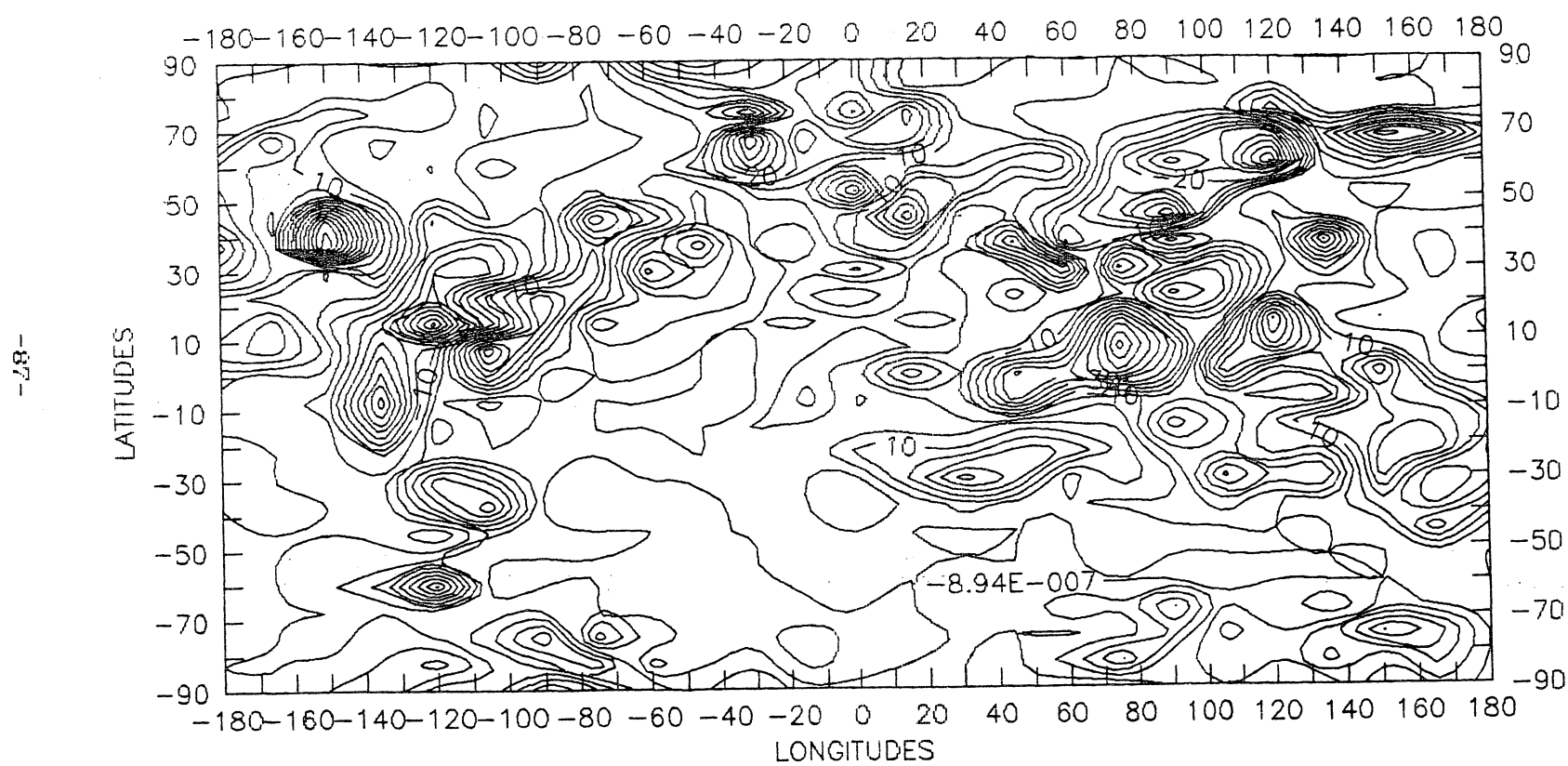
ONDULACAO GEOIDAL CALCULADO PELO METODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO  
ELEMENTOS DE 10 GRAUS POR 10 GRAUS

LAT\LON	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180
85.5	7	2	0	0	0	20	3	5	5	2	11	-5	-6	27	29	4	0	0
75.5	1	0	3	0	14	16	3	4	22	7	-25	-31	15	5	0	-2	9	19
65.5	1	-7	-25	9	2	1	0	3	-3	6	4	8	6	16	1	0	25	-9
55.5	-26	-35	4	27	1	0	11	-21	4	5	-12	-11	15	5	0	0	-4	0
45.5	0	0	5	-3	-6	-5	-3	7	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
35.5	1	4	-4	-8	-1	0	6	-4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-4.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-14.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-24.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-34.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-44.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-54.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-64.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-74.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-84.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

LAT\LON	190	200	210	220	230	240	250	260	270	280	290	300	310	320	330	340	350	360
85.5	25	8	-4	-3	-2	1	16	-2	47	26	-7	-15	11	2	5	-7	-13	-22
75.5	10	-18	20	9	-2	-16	-12	9	8	4	-26	-11	-4	3	-4	13	-2	7
65.5	1	7	-1	-7	10	0	0	0	0	0	1	2	1	0	0	0	7	10
55.5	3	1	-3	6	0	0	16	3	0	2	3	2	0	0	0	0	2	0
45.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
35.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-4.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-14.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-24.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-34.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-44.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-54.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-64.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-74.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-84.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0



Fig.IV.3.3 CARTA GEOIDAL 5X5



## CAPITULO V

### CONCLUSÃO

Comparando a carta geoidal obtida pelo Método dos Elementos de Contorno e a obtida pelos Coeficientes Harmônicos Esféricos até grau 16, publicado por Baker [1] na página 91, que reproduzimos no apêndice IV, na página 114, observamos que as ondulações máximas e mínimas ocorrem aproximadamente nos mesmos pontos, e as tendências geoidais são semelhantes.

Com relação os resultados da referência [37] na região do Brasil observamos o mesmo, isto é, a ondulação geoidal nula coincide e as máximas e mínimas ocorrem nos pontos próximos.

O comportamento da ondulação geoidal na malha de vinte é aproximadamente da média aritmética dos quadrados correspondentes da malha de dez. Portanto a malha maior tem variação de ondulação menor que a malha mais refinada. Isto nos leva a concluir que numa malha menor ainda, a variação de ondulação pode ser maior, o que talvez possa aproximar mais aos valores apresentados por Baker.

Os resultados talvez fossem melhores se usássemos elementos lineares ou quadráticos, ou malhas mais refinadas, uma vez que o Método dos Elementos de Contorno é bastante sensível às imperfeições geométricas do modelo, considerando também que os dados utilizados são antigos.

Achamos que este método é perfeitamente aplicável aos problemas geodésicos, e em particular para o Problema de Valor de Contorno da Geodésia Física. Principalmente em se tratando de computadores pequenos, de pequena capacidade de armazenamento de dados.

Numa comparação mais detalhada das alturas geoidais calculadas neste trabalho e as calculadas através dos Coeficientes Harmônicos Esféricos de Rapp (OSU91-A) encontramos diferenças, e a razão disto é devido a malha utilizada e o fato dos elementos serem constantes. Portanto utilizando malhas mais refinadas e elementos lineares, quadráticos ou cúbicos, os resultados seriam melhores o que fica como sugestão para trabalhos futuros.

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1]BAKER, E.M. The finite element model of the earth's anomalous gravitational potencial. Reports of Department of Geodetic Science. Report n.391. Junho 1988.
- [2]BANERJEE,P.K, BUTTERFIELD,R.Boundary element methods in engineering science London, Macgraw-Hill Book Company Limited,1981.
- [3]BESKOS, D.E. Boundary element methods in mechanics. North-Holland,1987.
- [4]BJERHAMMAR, A. The space geoid. In: VEIS, George. the use of artificial satellites for geodesy. Athens, Publication of the National Technical University, 1967. p.455-66.
- [5]BREBBIA,C.A. The boundary element method for engineers. London, Prentech Press, 1984.
- [6]BREBBIA,C.A., DOMINGUEZ,J. Boundary elements an introductory course. Computational Mechanics Publications Southhampton. Boston,1989.
- [7]BREBBIA C.A, FERRANTE A.J. Computational methods for the solution of engineering problems. London, Pentech Press Limited, 1978.
- [8]BREBBIA,C.A., TELLES, J.C., WROBEL,L.C. Boundary element techniques theory and application in engineering. Springer-Verlag. Berlin,1984.
- [9]DRAGOMIR, V.C., GHITAU, D.N., MIHAILESCU, M.S., ROTARU, M.G. Theory of the earth's shape. Elsevier Scientific Publishing Company. Amsterdam, 1982.
- [10]GEMAEL, C. Introdução à geodésia geométrica. Curitiba, Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-graduação em Ciências Geodésicas, 1988.
- [11]GEMAEL,C. Geodésia física. São Paulo, Universidade de São Paulo, Instituto Astronômico e Geofísico, Curso de Pós-graduação em Geofísica.1978.

- [12] HEISKANEN, W.A. & MORITZ, H. Physical geodesy. San Francisco, W.H. Freeman and Company, 1976.
- [13] HUEBNER, K. H. Finite elements method for engineer. New York, John Wiley & Sons, 1975.
- [14] JEKERLI, C. Global accuracy estimates of point and mean undulation difference obtained from gravity disturbances, gravity anomalies and potential coefficients. Reports of the Department of Geodetic Science. Columbus, (288). 1979.
- [15] JUNKINS, J.L. Investigation of finite element representation of geopotential. AIAA Journal, vol 14, n.6. Junho 1976. p 801-808.
- [16] JUNKINS J. L. & ENGELS, R.C. The finite element approach in gravity modelling. Manuscripta Geodaetica, vol 14. 1979. p 185-205.
- [17] KEARSLEY, W. The prediction and mapping of geoidal undulation from GEOS-3 altimetry. Report of the Department of Geodetic Science. Columbus, (267), 1977.
- [18] KELLOG, O. D. Potential theory. New York, Dover Publication, 1954.
- [19] LAMBERT, W.D & DARLING, F.W. (1936) Table for determining the form of the geoid and its indirect effect on gravity. U.S.G.S Spec Publ n.199. Washington.
- [20] MEISSEL, P. The use of finite elements in physical geodesy. Reports of the department of geodetic science. Report n.313. 1981.
- [21] MERRY, C.L. Studies towards an astrogravimetric geoid for Canada. Technical Report, (31): 129. February 1975.
- [22] MOLODENSKII, M. S. et alii. Méthods for study of the external gravitational field and figure of the earth. Jerusalém, Israel Program for Scientist Translations, 1962. 248p.
- [23] ODEN, J.T. Finite elements of nonlinear continua. New York, Macgraw-hill Book Company, 1972.
- [24] RAPP, R. H. Numerical results from the combination of gravimetric and satellite data using the principles of least square collocation. Report of Geodetic Science. Columbus, (200). 1973.

- [25]RAPP, R.H. Mean gravity anomalies and sea surface height derived from Geos - 3 altimeter data. Report of the Department of Geodetic Science. Columbus, (268). 1977.
- [26]RAPP, R.H. e CRUZ, J.Y.. The representation of the earth's gravitational potential in a spherical harmonic expansion of the degree 250. Report of Geodetic Science. Columbus, (372), 1986.
- [27]RAPP, R.H. e CRUZ, J.Y.. Spherical harmonic expansions of the earth's gravitational potential of degree 360 using 30' mean anomalies. Report of the Department of Geodetic Science. Columbus, (376), 1986.
- [28]RAPP,R.H. & RUMMEL, L.R. Methods for the computation of detailed geoids and their accuracy. Reports of the Department of Geodetic Science, Columbus,(233),1975.
- [29]REKTORYS, K. Variational methods in mathematics, science and engineering. Boston, D. Reidel Publishing Company. 1975.
- [30]SANTOS Jr.,R.L. Aplicação do método astrogravimétrico na região do Datum Chuá. Curitiba, dissertação do metrado do Curso em Ciências Geodésicas do Setor de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná. 1993.
- [31]SILVA, M. Novas formulações integrais para problemas da mecânica. Universidade Federal de Santa Catarina, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. Florianópolis, março 1980.
- [32]SOLLINS, A.D. Tables for the computation of deflections of the vertical from gravity anomalies.Bulletin Géodésique, Paris, (60): 279-300,October, 1947.
- [33]SCHIMIDT,H.F. Sampling function and gravity field. Reviews of geophysics and space physics. vol 19, n.3, August 1981, p 421-436.
- [34]STRANG G. Linear Algebra and its applications. Orlando, Academic Press Inc, 1980.
- [35]TORGE, W. Geodesy. Berlim, Walter de Gruyter, 1980, 254p.
- [36]IACIG Reference Publication. 1° x 1° mean free-air gravity anomalies. St. Louis, (29), 1971.

- [37]YAMAMOTO, T. M. Método de determinação do geóide. Curitiba. Dissertação de mestrado do Curso de Pós-Graduaçãoem Ciências Geodésicas do setor de Tecnologia de Universidade Federal do Paraná. 1983.
- [38]ZIENKIEWICZ, O.C. The finite element method. 3.edição. London,MacGraw-HillBook Company,1977.
- [39]ZIENKIEWICZ O. C., MORGAN K. Finite elements and approximation. John Wiley & Sons, New York 1983.

## APENDICE I

### INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Para montar o sistema de equações do tipo  $A.Y=F$ , a partir da expressão (IV.12), surge a necessidade de avaliar as integrais definidas que não são facilmente obtidas. O método básico envolvido na aproximação de

$$\int_a^b f(x)dx$$

é chamada quadratura numérica e usa a soma do tipo

$$\sum_{i=1}^n a_i f(x_i)$$

para aproximá-la.

Os métodos de quadratura que discutiremos baseam-se nos polinômios de interpolação. Primeiro selecionamos um conjunto de nós distintos  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  de um intervalo  $[a, b]$ . Se  $P_n$  é o polinômio de Legendre

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) L_i(x)$$

integramos  $P_n$  sobre  $[a, b]$  para obter a fórmula de quadratura

$$I_{n+1}(f) = \int_a^b \sum_{i=1}^n f(x_i) L_i(x) dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$$

onde



$$a_i = \int_a^b L_i(x) dx \quad \text{para cada } i=0,1,\dots,n.$$

O grau de precisão de uma fórmula de quadratura é o inteiro positivo  $n$ , tal que  $E(P_k)=0$  para todos polinômios  $P_k$  de grau menor ou igual a  $n$ , mas para o qual  $E(P_k) \neq 0$  para algum polinômio de grau  $n+1$ .

Existem fórmulas de quadraturas conhecidas como a de Newton-Cotes que usa nós igualmente espaçados. Elas requerem que os valores da função integranda sejam conhecidos nos pontos igualmente espaçados. Se a função é dada explicitamente, entretanto, os pontos para avaliação da função poderiam ser escolhidos de outra maneira, o que conduz a um aumento de precisão da aproximação. Isto é o que ocorre com a Quadratura Gaussiana, que diz respeito a escolha de pontos para avaliação numa maneira ótima. Ela apresenta um procedimento para escolha de valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$  no intervalo  $[a,b]$  e constantes  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , que minimizam o erro obtido na aproximação

$$\int_a^b f(x) dx \cong \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) \quad (A1)$$

para uma função arbitrária  $f$ . Para medir esta precisão, é geralmente considerado que a melhor escolha destes valores será a escolha que maximize o grau de precisão da fórmula.

Como os valores de  $c_1, c_2, \dots, c_n$  são completamente arbitrários e aqueles de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são restritos somente no caso que a função cuja integral está sendo aproximada deve ser definida nestes pontos, existem ao menos  $2n$  parâmetros envolvidos.

Se os coeficientes de um polinômio são também considerados como parâmetros, a classe dos polinômios de grau no máximo  $(2n-1)$  contém  $2n$  parâmetros e é a maior classe de polinômios para o qual é razoável esperar que a equação (A1) seja exata. Isto implica que a equação (A1) é de grau de precisão  $(2n-1)$ .

Antes de começarmos o estudo da quadratura de Gauss, é necessário uma discussão sobre conjuntos ortogonais de funções.

O conjunto de funções  $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$  é dito ser ortogonal sobre  $[a, b]$  com respeito a função peso  $w(x) \geq 0$  se

$$\int_a^b \phi_k(x) \phi_j(x) w(x) dx \begin{cases} = 0 & \text{quando } j \neq k \\ \geq 0 & \text{quando } j = k. \end{cases}$$

Pode-se mostrar que: Se  $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$  é um conjunto de polinômios definidos sobre  $[a, b]$  e  $\phi_i$  é de grau  $i$  para cada  $i=0, 1, \dots, n$ , então para qualquer polinômio  $Q$  de grau no máximo  $n$ , existem únicas constantes  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , com

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(x)$$

Teorema-1 Se  $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$  é um conjunto de polinômios ortogonais definido sobre  $[a, b]$  com respeito a função peso contínuo  $w$  e  $\phi_k$  é um polinômio de grau  $k$  para cada  $k=0, 1, \dots, n$ , então  $\phi_k$  tem  $k$  raízes distintas, e estas raízes estão no intervalo  $(a, b)$ .

Para aplicar o resultado do teorema-1, suponhamos que  $f$  seja uma função para a qual uma aproximação de

$$\int_{-1}^1 f(x) dx$$

é necessária. O conjunto dos polinômios de Legendre  $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ , é definido e sabemos ser ortogonal sobre  $[-1, 1]$  com respeito a  $w(x)=1$ . Escolhamos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  para ser as  $n$  raízes distintas de  $P_n$ . O teorema-1 nos assegura que estas raízes estão entre  $(-1, 1)$ .

Suponhamos  $P$  um polinômio arbitrário de grau  $k$ , onde  $k \leq 2n-1$ . Dividimos  $P$  por  $P_n$  dá

$$P(x) = Q(x)P_n(x) + R(x),$$

onde ambos  $Q$  e  $R$  são polinômios de grau menor que  $n$ . Suponhamos a fórmula de quadratura é dado pela fórmula

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \cong \sum_{i=1}^n c_i f(x_i)$$

onde

$$c_i = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} dx$$

para cada  $i=1, 2, \dots, n$ , e os  $x$  são como mencionados acima. Como  $Q$  e  $R$  são de grau menor que  $n$ ,

$$\int_{-1}^1 P(x) dx = \int_{-1}^1 Q(x)P_n(x) dx + \int_{-1}^1 R(x) dx$$

$$\int_{-1}^1 P(x)dx = 0 + \int_{-1}^1 R(x)dx = \sum_{i=1}^n c_i R(x_i).$$

Mas como  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são todas raízes de  $P_n$ ,  $P(x_i) = Q(x_i)P_n(x_i) + R(x_i) = R(x_i)$ ; assim

$$\int_{-1}^1 P(x)dx = \sum_{i=1}^n c_i P(x_i),$$

e a fórmula é exata para todo polinômio de grau no máximo  $2n-1$ .

As constantes  $c_i$  poderiam ser obtidas resolvendo as  $n$  equações lineares nas  $n$  incógnitas

$$\int_{-1}^1 P^2(x)dx = \sum_{i=1}^n c_i P^2(x_i),$$

mas na verdade ambas as constantes e os valores das raízes de  $P_n$  são amplamente tabeladas. Apresentamos a tabela 1 de Zienkiewicz [38].

TABELA 1

Abscissas e coeficientes de peso da  
formula de quadratura gaussiana

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \cong \sum_{i=1}^n c_i f(x_i)$$

±a			c		
			n=1		
0			2.00000	00000	00000
			n=2		
0.57735	02691	89626	1.00000	00000	00000
			n=3		
0.77459	66692	41483	0.55555	55555	55556
0.00000	00000	00000	0.88888	88888	88889
			n=4		
0.86113	63115	94053	0.34785	48451	37454
0.33998	10435	84856	0.65214	51548	62546
			n=5		
0.90617	98459	38664	0.23692	68850	56189
0.53846	93101	05683	0.47862	86704	99366
0.00000	00000	00000	0.56888	88888	88889
			n=6		
0.93246	95142	.3152	0.17132	44923	79170
0.66120	93864	66265	0.36076	15730	48139
0.23861	91860	83197	0.46791	39345	72691
			n=7		
0.94910	79123	42759	0.12948	49661	68870
0.74153	11855	99394	0.27970	53914	89277
0.40584	51513	77397	0.38183	00505	05119
0.00000	00000	00000	0.41795	91836	73469
			n=8		
0.96028	98564	97536	0.10122	85362	90376
0.79666	64774	13627	0.22238	10344	53374
0.52553	24099	16329	0.31370	66458	77887
0.18343	46424	95650	0.36268	37833	78362

## QUADRATURA GAUSSIANA EM DUAS OU TRÊS DIMENSÕES

Num contexto bi-dimensional, estamos diante do problema de avaliar a integral dupla da forma

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(\xi, \eta) d\xi d\eta . \quad (A2)$$

Como integrando estendido sobre um domínio retangular, o procedimento mais simples é calcular duas integrais numéricas nas direções independentes  $\xi$  e  $\eta$ . Assim começamos por avaliar o produto interno, usando as fórmulas da seção precedente, e obter

$$\int_{-1}^1 G(\xi, \eta) d\xi = \sum_{i=1}^n W_i G(\xi_i, \eta) \quad (A3)$$

Podemos seguir isto para uma integral similar na direção  $\eta$  tal que

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^n W_i G(\xi_i, \eta) d\eta \\ &= \sum_{j=1}^n W_j \sum_{i=1}^n W_i G(\xi_i, \eta_j) \end{aligned} \quad (A4)$$

e resultando finalmente na aproximação

$$I = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_{ij} G(\xi_i, \eta_j), \quad W_{ij} = W_i W_j \quad (A5)$$

Agora  $(\xi_i, \eta_j)$  denota a posição dos pontos amostrais cuja localização exata é determinada pelo tipo da fórmula integral empregada.

Em (A5) o número de pontos de integração em cada direção foi assumido o mesmo. Evidentemente isto não é necessário e há ocasiões em que pode ser vantajoso usar números diferentes em cada direção de integração.

Se as integrais nas direções  $\xi$  e  $\eta$  separadamente são exatas para polinômios de grau  $p$ , então expressão (A5) integrará exatamente todos os termos com  $\xi^{p_1} \eta^{p_2}$  onde  $p_1, p_2 \leq p$ .

A extensão tri-dimensional prismática  $-1 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1$  é trivialmente resultante em

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \\ = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n W_{ijk} G(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \quad W_{ijk} = W_i W_j W_k \end{aligned} \quad (A6)$$

Observa-se que o processo descrito acima será exato para termos adicionais àqueles que aparecem num polinômio de grau  $p$  nas variáveis independentes  $\xi, \eta, \zeta$ .

#### INTEGRAÇÃO NUMÉRICA SOBRE DOMÍNIO TRIANGULAR

Integração numérica sobre um triângulo pode ser calculada em termos de coordenadas triangulares  $\eta_1, \eta_2$  e  $\eta_3$ , ver Fig.A.1, como segue

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-\eta_2} f(\eta_1, \eta_2, \eta_3) d\eta_1 d\eta_2 \cong f(\eta_1^i, \eta_2^i, \eta_3^i) w_i \quad (A7)$$

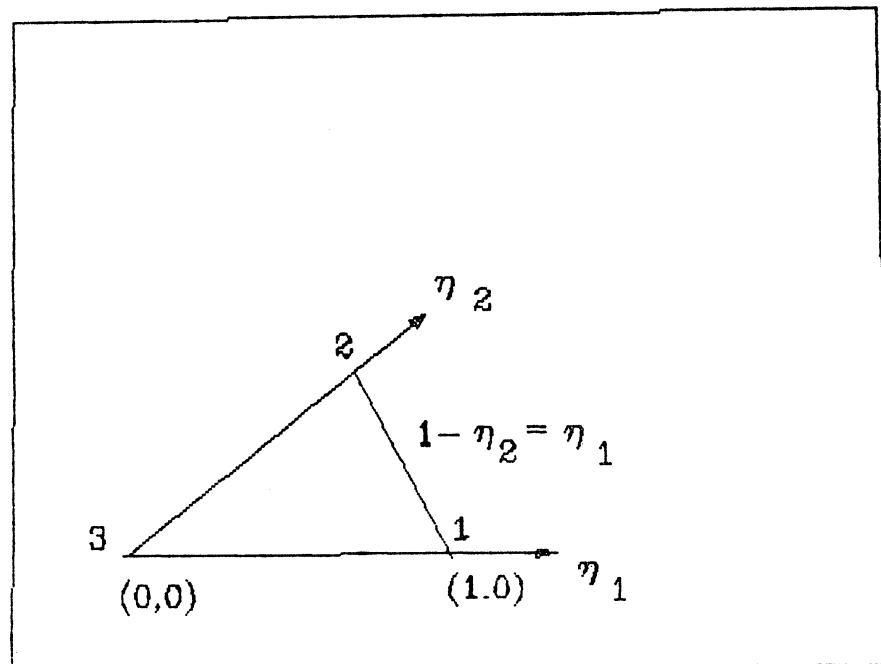


Fig.A.1 Coordenadas triangulares  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  e  $\eta_3 = 1 - \eta_1 - \eta_2$ .



na qual às coordenadas triangulares são associados fatores de peso devido a Hammer [8] e dados na TABELA 2.

#### INTEGRAÇÃO NUMÉRICA SOBRE TRIÂNGULOS COM SINGULARIDADE $1/R$

Fórmula de quadratura numérica para este caso foi apresentado por Brebbia et al [8], para ser aplicado como segue:

$$\int_{w^R} \frac{1}{r} f(x,y) dw \cong \sum_{i=0}^n f(x_i, y_i) w_i \quad (A8)$$

onde  $w$  representa o domínio de integração esboçado na Fig. A.2. Os pontos e pesos estão apresentados na TABELA 3.

TABELA 2

n	i	$\eta_1^i$	$\eta_2^i$	$\eta_3^i$	$w_i$
1(linear)	1	1/3	1/3	1/3	1
2(quadrático)	1	1/2	1/2	0	1/3
	2	0	1/2	0	1/3
	3	1/2	0	1/2	1/3
4(cúbico)	1	1/3	1/3	1/3	-9/16
	2	3/5	1/5	1/5	25/48
	3	1/5	3/5	1/5	25/48
	4	1/5	1/5	3/5	25/48

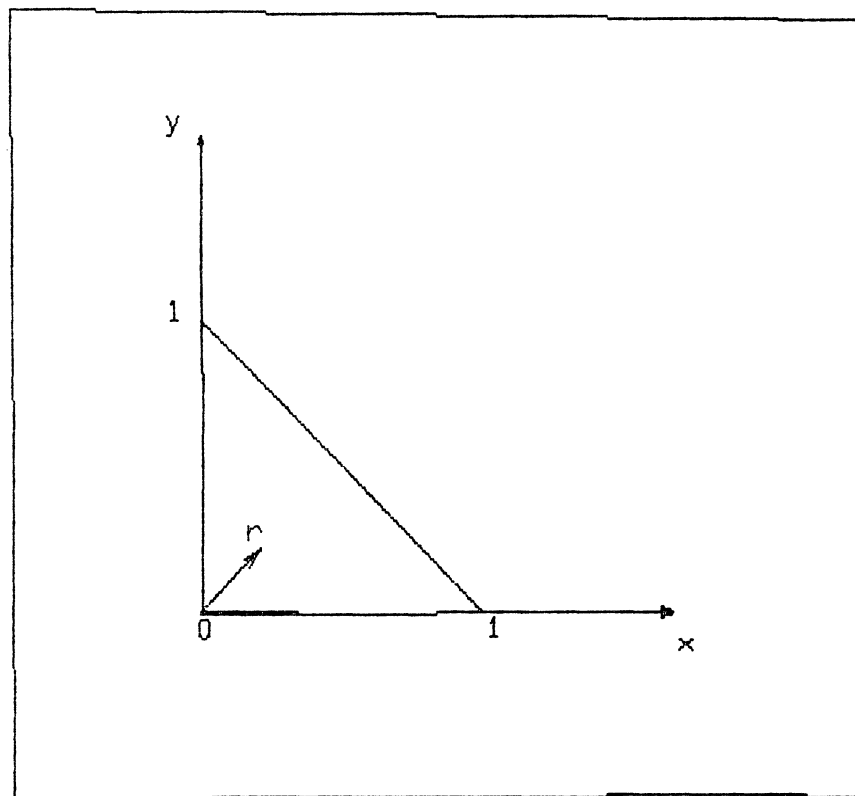


Fig.A.2 Elemento triangular com singularidade na origem.

TABELA 3

n	$x_i$	$y_i$	$w_i$
1	0.25	$y_1 = x_1$	1.24645048
2	0.16666667	$y_1 = x_1$	0.93483790
	0.81742619	0.18257381	0.15580629
	$x_3 = y_2$	$y_3 = x_2$	$w_3 = w_2$
3	0.16385495	0.04756957	0.31161231
	0.61114353	0.17753138	0.31161293
	$x_3 = y_1$	$y_3 = x_1$	$w_3 = w_1$
	$x_4 = y_2$	$y_4 = x_2$	$w_4 = w_2$

## APÊNDICE II

### TEOREMA DE GREEN - INTEGRAÇÃO POR PARTES

Considere a integração por partes da seguinte expressão bi-diminsional

$$\int \int_{\Omega} \phi \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dy. \quad (B1)$$

Integrando por partes com respeito a x e usando a relação bem conhecida para integração por partes

$$\int_{x_1}^{x_2} u dv = - \int_{x_1}^{x_2} v du + (uv)_{x=x_2} - (uv)_{x=x_1} \quad (B2)$$

temos, com símbolos da Fig.(B.1)

$$\int \int_{\Omega} \phi \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dy = - \int \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x} \psi dx dy +$$

$$\int \int_{\Omega} [(\phi \psi)_{x=x_2} - (\phi \psi)_{x=x_1}] dx dy. \quad (B3)$$

Se agora considerarmos reto o segmento  $d\Gamma$  do contorno, a direita, então a projeção na direção y será

$$dy = d\Gamma n_x \quad (B4)$$

onde  $n_x$  é o cosseno diretor entre a normal e o eixo x. Similarmente, a esquerda, temos

$$dy = -d\Gamma n_x. \quad (B5)$$

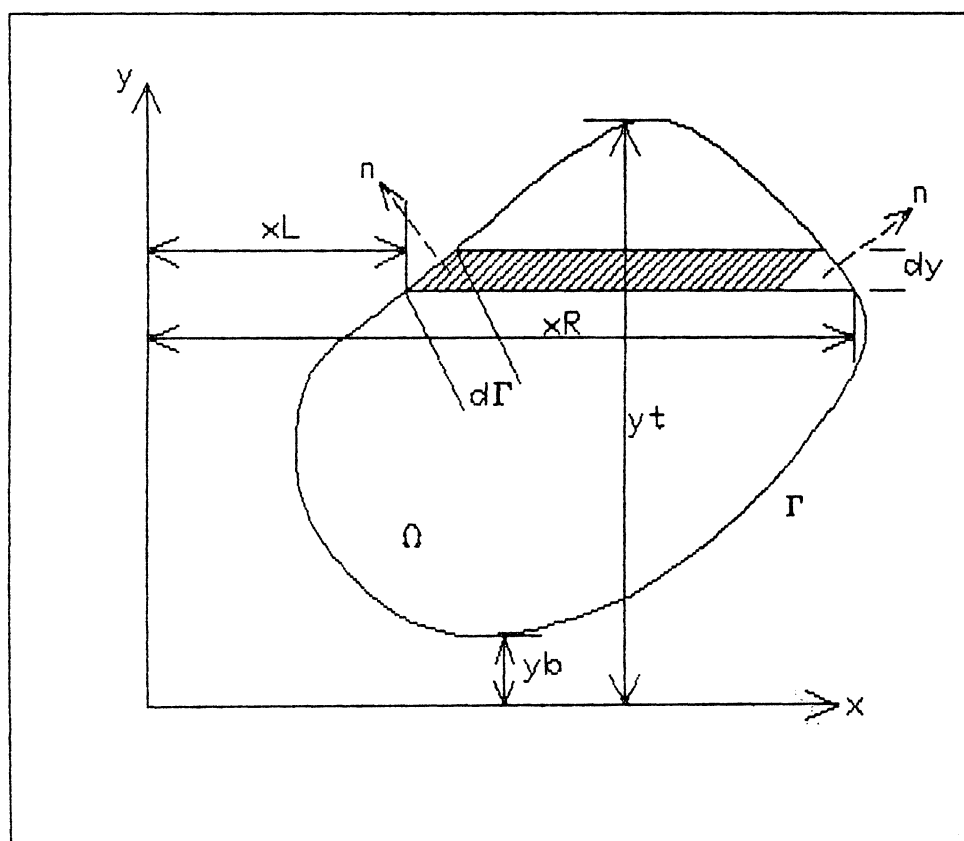


Fig. B.1 Elementos de integração por partes.

O último termo de (B2) pode assim ser expresso como a integral formada no sentido anti-horário

$$\oint_{\Gamma} \phi \psi \Gamma n_x \quad (B6)$$

Se muitos contornos fechados forem considerados esta integração tem que ser tomada em torno de cada contorno. A expressão geral é em todos casos

$$\begin{aligned} \int \int_{\Omega} \phi \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dy = & - \int \int_{\Omega} \psi \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy + \\ & + \oint_{\Gamma} \phi \psi n_x dx dy \end{aligned} \quad (B7)$$

Similarmente se a diferenciação na direção y for considerada podemos escrever

$$\begin{aligned} \int \int_{\Omega} \phi \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dy = & \int \int_{\Omega} \psi \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy + \\ & + \oint_{\Gamma} \phi \psi n_y dx dy \end{aligned} \quad (B8)$$

onde  $n_y$  é o cosseno do ângulo entre a normal externa e o eixo y.

No caso tridimensional por procedimento idêntico podemos escrever

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} \phi \frac{\partial \psi}{\partial x} \, dx \, dy \, dz &= - \iiint_{\Omega} \psi \frac{\partial \phi}{\partial x} \, dx \, dy \, dz + \\
&+ \oint_{\Gamma} \phi \, \psi \, n_x \, dx \, dy
\end{aligned} \tag{B9}$$

### APÊNDICE III

#### METODO DE GAUSS-SEIDEL PARA RESOLVER SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

Quando o sistema de equações é muito grande é conveniente resolvê-lo por um método iterativo, sob certas condições.

Consideremos o sistema

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

(C1)

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nk}x_k + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

Consideremos uma solução inicial  $x^0$  e resolvamos a primeira equação para  $x_1$ , i.e.,

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}} (-a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n + b_1).$$

Na equação seguinte, opera-se imediatamente com este novo valor de  $x_1$ , para calcular  $x_2$ , ou seja:

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}} [-a_{21}x_1 + (-a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n + b_2)].$$

E a última equação usará somente os valores calculados



$$x_n = \frac{1}{a_{nn}} (-a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{nn}x_n + b_n).$$

Se esta solução não é satisfatória, é tomada como novo valor inicial, e o procedimento acima é repetido até a diferença entre o valor inicial e o calculado tornar-se suficientemente pequena.

Assim temos a equação para a r-ésima iteração

$$x_k^{(r)} = \frac{1}{a_{kk}} \left( -\sum_{i=1}^{k-1} a_{ki}x_i^{(r)} - \sum_{i=k+1}^n a_{ki}x_i^{(r-1)} + b_k \right).$$

Nestas soluções é necessário adotar um critério de convergência, que indique quando a iteração poderia ser terminada. No nosso caso, usamos a norma do máximo, i.e., a maior das diferenças entre as componentes do valor inicial e do calculado, seja menor que 1%; e ao mesmo tempo indique o maior número de iterações a ser permitido, no caso da solução não convergir.

Para alguns sistemas a convergência pode ser relativamente lenta. Em tal caso, usamos um fator de sobre-relaxação para poder aumentar a velocidade de convergência da iteração [34].

O método de Gauss-Seidel, apesar de simples de aplicar, é infelizmente muito sensível a pequenas variações na matriz dos coeficientes. O método terá convergência lenta para sistema mal-condicionado. Para sistema não singular a convergência pode ser lenta ou mesmo falhar. Na prática o critério de convergência mais usado é

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad (C2)$$

isto é, sistema diagonalmente dominante.

## APÊNDICE IV

### CARTAS GEODAIS

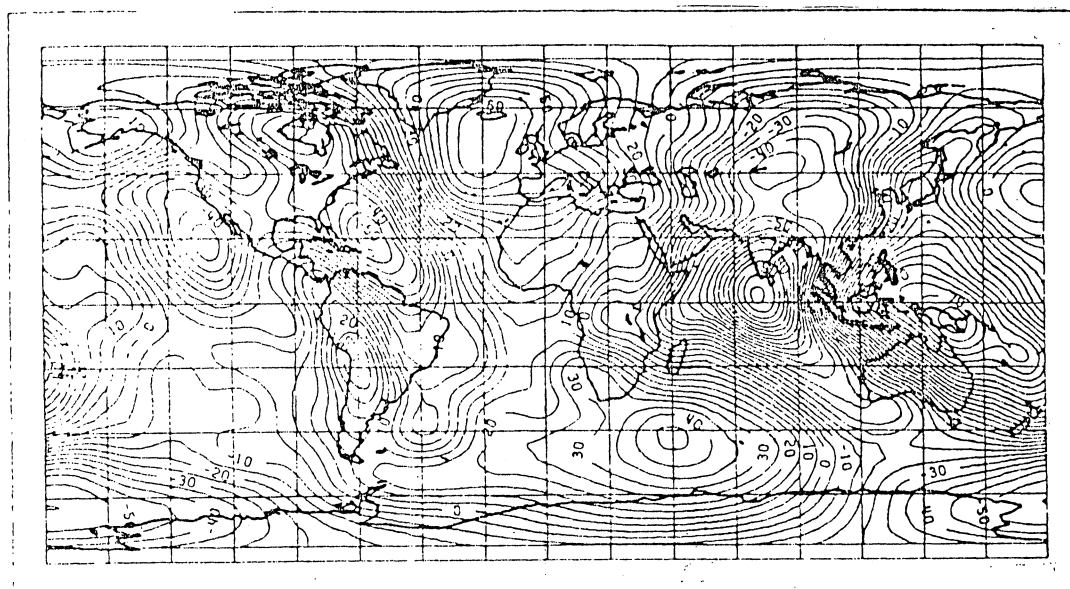


Fig.C.1 Geóide de referência de Rapp (1978),  $N_{max}=16$ , C.I.=5m.

## APENDICE V

### LISTAGEM DOS PROGRAMAS

```
program anomedias;
```

```
{este programa calcula as medias das anomalias nos "quadrados" de 5 graus por}  
{5 graus e grava no arquivo anomedias.dat}
```

```
VAR  I,J,K,L,M,II,JJ,KK,LL,MM,NN      :INTEGER;  
     CONT                             :REAL;  
     ANOMED                           :ARRAY[1..36,1..72] OF REAL;  
     SOMA                             :ARRAY[1..4,1..4] OF REAL;  
     ANOM                             :ARRAY[0..19,0..19] OF REAL;  
     ARQ,ARQ1,ARQ2                   :TEXT;
```

```
BEGIN
```

```
  ASSIGN (ARQ,'ANOMteste.DAT');
```

```
  RESET(ARQ);
```

```
  ASSIGN (ARQ1,'ANOM5.DAT');
```

```
  REWRITE(ARQ1);
```

```
  {ASSIGN (ARQ2,'ANOMBRAS.DAT');
```

```
  REWRITE(ARQ2);}
```

```
  CONT:=0;
```

```
  for MM:=1 TO 9 DO
```

```
    BEGIN
```

```
      FOR NN:=1 TO 18 DO
```

```
        BEGIN
```

```
          CONT:=0;
```

```
          {LEITURA DA PAGINA}
```

```
          FOR I:=0 TO 19 DO
```

```
            BEGIN
```

```
              FOR J:=0 TO 19 DO
```

```
                BEGIN
```

```
                  READ(ARQ,ANOM[I,J]);
```

```
                  {cont:=cont+anom[i,j];}
```

```
                  {WRITE(ANOM[I,J]);}
```

```
                END;
```

```
              READLN(ARQ);
```

```
            END;
```

```
            {CONT:=CONT+1;
```

```
            cont:=cont/400;
```

```
            WRITELN('CONT=',CONT);
```

```
            WRITELN(arq1,CONT);}
```

```
          {READLN;}
```

```
          {CALCULO DA MEDIA DA PAGINA MM X NN }
```

```
          {FOR II:=(MM-1)*2+1 TO (MM*2) DO
```

```
            BEGIN
```

```
              FOR JJ:=(NN-1)*2+1 TO (NN*2) DO
```

```
                BEGIN
```

```
                  ANOMED[II,JJ]:=0;}
```

```
              FOR I:=1 TO 2 DO
```

```
                BEGIN
```

```
                  FOR K:=1 TO 2 DO
```

```
                    BEGIN
```

```
                      SOMA[I,K]:=0;
```

```
                      II:=(NN-1)*4+1;
```

```
                      JJ:=(MM-1)*4+1;
```

```
                      ANOMED[II,JJ]:=0;
```

```
                    FOR KK:=(I-1)*10 TO (I*10-1) DO
```

```
                      BEGIN
```

```
                        FOR J:=(K-1)*10 TO (K*10-1) DO
```

```
                          BEGIN
```

```
                            { WRITELN('KK=',KK,' J=',J,' ANOM[KK,JJ]=' ,ANOM
```

```
[KK,JJ]);READLN;}
```

```

        SOMA[I,K]:= SOMA[I,K]+ANOM[KK,J]/100;
        ANOMED[II,JJ]:=ANOMED[II,JJ]+ANOM[KK,J]/100;
        END;
        END;
        WRITELN(arq1,SOMA[I,K]);
        {READLN;}
    END;
    END;
    {ANOMED[II,JJ]:=SOMA[I,K];
    WRITE('ANOMED[',II,',',',',JJ,']=',ANOMED[II,JJ], '***');
    READLN;
    END;
    READLN;
    WRITELN;
    END;}
END;
END;

{    FOR LL:=1 TO 36 DO
    begin
    FOR M:=1 TO 72 DO
        begin
            WRITELN('ANOMED[',LL,',',',',M,']=',ANOMED[LL,M], '***');
            end;
            readln;
        end;}

close(arq);
close(arq1);
{close(arq2);}

END.

```

```

program integral;

{*****}
{o sistema foi montado usando  $1/2 \cdot \text{integral2} + (2/R) \cdot \text{integral1} = -dg \text{ integral1}$ }
{com elemento triangular com singularidade  $1/d$ }
{elemento de 5 graus por 5 graus}
{*****}

{uses crt,printer;}

var      i,j,k,l,m,n,ii,jj,kk,ll,mm,nn,ARG2,ARG1      :integer;
        cont,CONTROLE,FIM,npint,PARTE,CHAVE          :integer;
        NPINT1,K1,K2,III                              :INTEGER;
        R,x,y,z,x1,x2,y1,y2,z1,z2                  :real;
        ksi,eta,zeta,func,dfunc                      :real;
        LAT1,LON1                                     :REAL;
        LAT2,LON2,ANOM,LAT,LON                      :REAL;
        ANOM1,ANOM2,dist,soma                        :REAL;
        XC,YC,ZC,FUNCAO,DFUNCAO,PI,COEF,RO          :REAL;
        GAMAMEDIO,INTEGRAL1,INTEGRAL2,INTEGRAL3      :REAL;
        CINCOUM,W1,W2                                :REAL;
        arq,arq1,arq2                                :text;
        coorint,w,COORDINT1,W11                     :ARRAY[1..15] of real;
LABEL    DESVIO, DESVIO1;

begin

ASSIGN(ARQ,'c:\tamia\ANOM6.DAT');
RESET(ARQ);
ASSIGN(ARQ2,'c:\tamia\ANOM5.DAT');
RESET(ARQ2);
ASSIGN(ARQ1,'NOME5.DAT');
REWRITE(ARQ1);

{DEFINICAO DAS CONSTANTES}

PI:=3.141592654;
R:=6.371E06;{METROS}
GAMAMEDIO:=979.8E03;{MILIGALS}
controle:=2592;
fim:=2592;
parte:=0;
npint:=3;
NPINT1:=1;
cincoum:=2.5;
JACOB:=0.001903859;

{DEFINICAO DAS COORDENADAS DE INTEGRACAO}

coorint[1]:=0.774596669241483;
coorint[2]:=0;
coorint[3]:=-coorint[1];

{DEFINICAO DOS PESOS}

w[1]:=0.5555555555555556;
w[2]:=0.8888888888888889;
w[3]:=w[1];

{DEFINICAO DAS COORDENADAS DOS PONTOS DE INTEGRACAO COM SINGULARIDADE}

coorint1[1]:=0.25;

```



```
coorint1[2]:=0.25;
```

```
{DEFINICAO DOS PESOS DA INTEGRAIS COM SINGULARIDADE}
```

```
w11[1]:=1.24645048;
```

```
{*****DEFINICAO DAS EQUACOES*****}
```

```
FOR II:=1 TO fim DO
```

```
  BEGIN
```

```
    CONT:=0;
```

```
    INTEGRAL3:=0;
```

```
    RESET(ARQ);
```

```
    {LEITURA DO PONTO FIXO}
```

```
    READln(ARQ2,LAT1,LON1);
```

```
{  writeln('II=',II,'    lat1=',lat1,'    lon1=',lon1);}
{readln;}
```

```
LAT1:=LAT1*PI/180;
```

```
LON1:=LON1*PI/180;
```

```
{TRANSFORMACAO PARA COORDENADAS XYZ}
```

```
{COORDENADAS DO CENTRO DOS ELEMENTOS}
```

```
X1:=R*COS(LAT1)*COS(LON1);
```

```
Y1:=R*COS(LAT1)*SIN(LON1);
```

```
Z1:=R*SIN(LAT1);
```

```
{*****INFLUENCIA DE CADA ELEMENTO*****}
```

```
FOR JJ:=1 TO FIM DO
```

```
  BEGIN
```

```
    INTEGRAL1:=0;
```

```
    INTEGRAL2:=0;
```

```
    CHAVE:=0;
```

```
    {LEITURA DO PONTO VARIÁVEL}
```

```
    READln(ARQ,lat2,lon2,anom2);
```

```
    if ii=jj then
```

```
      begin
```

```
        chave:=1;
```

```
        goto desvio;
```

```
      end;
```

```
    FOR I:=1 TO npint DO
```

```
      BEGIN
```

```
        CHAVE:=0;
```

```
        W1:=W[I];
```

```
        KSI:=COORINT[I];
```

```
        FOR J:=1 TO npint DO
```

```
          BEGIN
```

```
            ETA:=COORINT[J];
```

```
            W2:=W[J];
```

```
            {DEFINICAO DAS COORDENADAS DO PONTO DE INTEGRACAO}
```

```
            LAT:=LAT2+KSI*CINCOUM;
```

```
            LON:=LON2+ETA*CINCOUM;
```

```
            lat:=lat*pi/180;
```

```
            lon:=lon*pi/180;
```

{COORDENADAS DO PONTO DE INTEGRACAO}

X:=R\*COS(LAT)\*COS(LON);

Y:=R\*COS(LAT)\*SIN(LON);

Z:=R\*SIN(LAT);

{VALOR DA DISTANCIA}

Dist:=SQRT((X-X1)\*(X-X1)+(Y-Y1)\*(Y-Y1)+(Z-Z1)\*(Z-Z1));

IF DIST=0 THEN BEGIN CHAVE:=1;GOTO DESVIO; END;

{VALOR DA FUNCAO}

FUNCAO:=(1/(4\*PI\*DIST))\*R\*R\*abs(COS(LAT)\*SIN(LAT))\*JACOB/SIN(LAT

);

{VALOR DA DERIVADA}

DFUNCAO:=(-1/(4\*PI\*DIST\*DIST))\*R\*R\*abs(COS(LAT)\*SIN(LAT))\*JACOB/

SIN(LAT);

{INTEGRAL}

INTEGRAL1:=INTEGRAL1+W1\*W2\*FUNCAO;

INTEGRAL2:=INTEGRAL2+W1\*W2\*DFUNCAO;

{TERMO INDEPENDENTE}

INTEGRAL3:=INTEGRAL3+INTEGRAL1\*ANOM2;

END;{J}

END;{I}

DESVIO:

IF CHAVE=1 THEN

BEGIN

FOR LL:=1 TO 4 DO

BEGIN

K1:=-1;

K2:=1;

FOR III:=1 TO LL DO

K1:=K1\*(-1);

IF LL>2 THEN K2:=-1;

FOR III:=1 TO npint1 do

BEGIN

W1:=W11[III];

KSI:=COORDINT1[III]\*K1;

ETA:=COORDINT1[III+NPINT1]\*K2;

WRITE('KSI=',KSI,' ETA=',ETA);

READLN;

{DEFINICAO DAS COORDENADAS DO PONTO DE INTEGRACAO}

LAT:=LAT2+KSI\*cincoum;

LON:=LON2+ETA\*cincoum;

lat:=lat\*pi/180;

lon:=lon\*pi/180;

{rotacao de 45 graus em torno do eixo z}

lat:=lat\*cos(45\*pi/180)-lon\*sin(45\*pi/180);

lon:=lat\*cos(45\*pi/180)+lon\*sin(45\*pi/180);

{COORDENADAS DO PONTO DE INTEGRACAO}

X:=R\*COS(LAT)\*COS(LON);

Y:=R\*COS(LAT)\*SIN(LON);

Z:=R\*SIN(LAT);

{VALOR DA FUNCAO}

FUNCAO:=R\*R\*abs(COS(LAT)\*SIN(LAT))\*JACOB/SIN(LAT);

```

      {INTEGRAL}
      INTEGRAL1:=INTEGRAL1+W1*FUNCAO;

      {TERMO INDEPENDENTE}
      INTEGRAL3:=INTEGRAL3+INTEGRAL1*ANOM2;

      END;{III}
    END;{LL}
  END;{DESVID IF}
  CHAVE:=0;

  {COM AS INTEGRAIS CALCULADAS GRAVAR COEFICIENTE DA INCOGNITA JJ}
  IF CHAVE=1 THEN
    COEF:=1/2+(2/R)*INTEGRAL1
  ELSE
    COEF:=INTEGRAL2+(2/R)*INTEGRAL1;
  {
    WRITELN('COEF',JJ,'J=',COEF,' II=',II);IF II=JJ THEN READLN;}
    WRITE(ARQ1,COEF,' ');
  END;{JJ}

  {GRAVA TERMO INDEPENDENTE E MUDA DE EQUACAO}

  WRITELN(ARQ1,-INTEGRAL3);
  WRITELN('BC',II,'J=',-INTEGRAL3);

END;{II}

CLOSE(ARQ);
CLOSE(ARQ1);
CLOSE(ARQ2);

end.

```

```

program gauseidel;

{*****}
  {para resolver o sistema usar +b ou -b}
{*****}

{Este programa calcula um sistema de equacoes lineares do tipo Ax=b}
{usando o metodo de GAUSS-SEIDEL}

USES CRT,PRINTER;

var
  i,j,k,l,ii,jj,kk,ll,N           : integer;
  ITER,NMAX                        : INTEGER;
  a,b,NORM,A1,SOMA,AUX,EPSLON,gamamedio : real;
  x                                : array[1..648] of real;
  ARQ,ARQ1                         : text;

BEGIN
  ASSIGN(ARQ,'C:\TAMIA\NOM10.DAT');
  RESET(ARQ);
  ASSIGN(ARQ1,'C:\TAMIA\RESUL10.DAT');
  REWRITE(ARQ1);

{*** DEFINICAO DAS CONSTANTES***}

gamamedio:=979.8E03;{MILIGALS}
N:=18*36{2592};      {N. DE EQUACOES E INCOGNITAS}
NMAX:=30000;         {N. MAXIMO DE ITERACAO}
EPSLON:=0.1;

{*** DEFINICAO DO VETOR INICIAL***}

FOR I:=1 TO N DO
  BEGIN
    X[I]:=0;
  END;

ITER:=0;

REPEAT

  ITER:=ITER+1;
  writeln('iter=',iter);
  RESET(ARQ);
  NORM:=0;

  FOR J:=1 TO N DO
    BEGIN
      SOMA:=0;
      FOR I:=1 TO N DO
        BEGIN
          READ(ARQ,A);
          if i=j then a1:=a
            else SOMA:=SOMA-A*X[I];
        END;

      READLN(ARQ,B);
      {
        writeln('soma=',soma);
      }
    END;
  END;

```

```

WRITELN('B=',B);}
AUX:=X[J];
if a1<>0 then x[J]:=(SOMA-B/(gamamedio))/A1
            else writeln('a1=',a1,' i=',i,' j=',j);
IF NORM<ABS(AUX-X[J]) THEN NORM:=ABS(AUX-X[J]);
END;

UNTIL (NORM<EPSLON) OR (ITER>NMAX);

WRITELN(ARQ1);
WRITELN(ARQ1,'ONDULACAO GEOIDAL CALCULADO PELO METODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO
');
WRITELN(ARQ1);
writeln(ARQ1,'norm=',norm);
WRITELN(ARQ1,'ITER=',ITER);
WRITELN(ARQ1);
WRITELN(ARQ1);

FOR I:=1 TO N DO
begin
WRITELN(ARQ1,x[I],'=X[' ,I,' ]');
{ WRITELN(X[I],'=X[' ,I,' ]');}
end;

CLOSE(ARQ);
CLOSE(ARQ1);

END.

```